Королевская школа Мостов и Дорог

1842 – 1843

Заметки по прикладной механике, относящиеся к принципам устойчивости сооружений и к динамической теории машин.

Глава 1-я *Краткое изложение основных понятий рациональной механики*

§: 1. О различных разделах механики.

1. Механика имеет своим предметом законы и причины движения и равновесия тел.

2. Всеобщие, не знающие исключений истины, относящиеся к этой науке, составляют рациональную механику, названную так потому, что её положения являются следствиями, которые рассуждение строго выводит из небольшого числа принципов или законов природы. Однако рациональная механика допускает в некоторых своих теориях существование тел, обладающих такими свойствами, как абсолютная твердость, абсолютная текучесть и т. д., которыми реальные тела никогда не обладают в полной мере, и положения, к которым наука приходит с помощью этих гипотез, подтверждаются в реальном мире лишь с большей или меньшей степенью приближения.

3. Рациональная механика делится на две части: статику, или науку о равновесии, и динамику, которая рассматривает соотношения движения с его причинами, называемыми силами.

4. Рациональная механика является необходимой основой различных наук, которые являются как бы ветвями механики, взятой в её самом общем значении: таковы математическая астрономия, или небесная механика, математическая физика, гидравлика, теория устойчивости сооружений, наука о машинах, или промышленная механика.

5. Последние три являются существенными частями знаний, полезных для инженеров мостов и дорог.

6. Наука о машинах, или промышленная механика, может быть разделена на несколько очень важных и настолько обширных частей, что никому не дано овладеть ими всеми в полной мере.

Первая часть, которая рассматривает в машинах главным образом передачи движения и соотношения, которым подчинены различные движения их частей, не

занимаясь расчетом интенсивности двигателя и сопротивлений, можно было бы назвать геометрической механикой, поскольку весьма разнообразные и часто очень остроумные приемы, которые она использует, почти исключительно основаны на правилах геометрии.

7. Третья часть относится к конструкции машин: она включает знание материалов, искусство их соединения и правила, позволяющие определять форму и размеры каждой детали в зависимости от воспринимаемых ею усилий.

8. Четвертую часть промышленной механики, которую можно обозначить названием механическая технология, относятся к инструментам, называемым станками, которые, будучи приводимы в движение соответствующими в каждом случае передаточными механизмами, непосредственно выполняют различные промышленные операции. Предметы, которыми занимается эта часть механики, на самом деле являются целью, к которой стремятся три другие, но наука в отношении них обладает немногими общими предписаниями, и они большей частью относятся к описательному обучению и практике.

9. Приняв в прошлом году темой наших лекций общую гидравлику и гидравлические машины, в этом году мы займемся другими разделами механики, представляющими интерес для инженеров. Материал настолько обширен, что мы часто будем вынуждены ограничиваться наиболее важными общими положениями. Впрочем, мы оставим специальным курсам строительства те подробности, которые к ним относятся. Прежде всего мы представим резюме основных понятий рациональной механики, которые послужат нам в дальнейшем в этом курсе, и установим смысл некоторых выражений, которыми нам придется пользоваться.

§: 2. О движении, рассматриваемом независимо от его причин.

10. Движение точки, если известна прямая или кривая линия, которую она проходит, определено, как только, выбрав неподвижную точку на этой линии и положительное направление, в котором она, как предполагается, порождена, мы имеем соотношение между положительным или отрицательным расстоянием движущейся точки до этой неподвижной точки и временем, прошедшим с момента, называемого начальным. Из этого соотношения, которое может быть выражено либо аналитически уравнением $s = F(t)$, либо графически кривой, выводится скорость в данный момент, аналитическое выражение которой есть $\gamma = \frac{ds}{dt}$, и значение которой, положительное или отрицательное, может быть получено либо вычислением этой производной, либо проведением касательной к кривой, представляющей движение.

11. Когда скорость постоянна, расстояние s изменяется пропорционально времени. Движение тогда называется равномерным; его аналитическое выражение есть $\gamma = a$ или $s = s_0 + at$. Скорость a, впрочем, положительна или отрицательна. Для данного равномерного движения числовое выражение a зависит от выбора единиц длины и

времени. На практике только при равномерном движении можно непосредственно наблюдать скорость точки.(*)

12. Когда скорость точки переменна, приходится рассматривать величину, называемую ускорением; её аналитическое выражение есть $\frac{dv}{dt}$, и её положительное или отрицательное значение в данный момент получается либо вычислением этой производной, либо графически проведением касательной в соответствующей точке кривой, координаты которой пропорциональны времени и скорости. Когда скорость и ускорение имеют одинаковый знак, движение является ускоренным в общеупотребительном смысле этого слова, в противном случае — замедленным. Когда ускорение постоянно (положительно или отрицательно), движение называется равномерно-переменным; и имеем $\frac{dv}{dt} == j$, откуда $\gamma = \gamma_0 + jt$, откуда $s = s_0 + \gamma_0 t + \frac{1}{2} jt^2$. Любое из этих трех уравнений неявно содержит два других, кроме определения постоянных s_0 и γ_0.

13. Когда линия, описываемая движущейся точкой, неизвестна a priori, её движение определено, как только известно движение её проекций на три координатные оси. Скорость точки в пространстве тогда существенно положительна и представляется по величине и направлению диагональю параллелепипеда, три смежные стороны которого представляют по величине и направлению положительные или отрицательные скорости проекций подвижной точки на координатные оси.

14. Пусть точка M имеет какое-либо движение. Если представить, что три координатные плоскости, образующие неизменный по форме трехгранный угол, также движутся каким-либо образом в пространстве, и предположить, что наблюдатель, невольно увлекаемый движением этих осей, считает их неподвижными, то видно, что этот наблюдатель припишет точке M движение, отличное от того, которым эта точка действительно обладает: это кажущееся движение называется относительным движением в системе подвижных осей, считающихся неподвижными. Скорость этого движения называется относительной скоростью.

15. Если в определенный момент рассмотреть положение A подвижной точки M, то эта геометрическая точка A, рассматриваемая как неизменно связанная с подвижными осями, обладает движением, зависящим исключительно от движения этих осей. Это то, что г-н Кориолис назвал переносным движением подвижной точки M в рассматриваемый момент. Текущая скорость точки A есть переносная скорость точки M.

16. Легко доказывается, что абсолютная скорость представляется по величине и направлению диагональю параллелограмма, две смежные стороны которого представляют таким же образом одну — переносную скорость, другую — относительную скорость.

(*) См. мемуары г-на Морена, озаглавленные *Description des appareils chronométriques à style propres à la représentation graphique et à la détermination des lois du mouvement*, (описание хронометрических устройств с особым стилем для графического представления и определения законов движения), 1838 г.

17. Различные движения твердого тела можно классифицировать следующим образом.

1. Общее поступательное движение, криволинейное или прямолинейное, которое имеет место, когда все точки системы обладают в каждый момент равными, параллельными и одинаково направленными скоростями.
2. Простое вращение вокруг неподвижной оси. В этом случае, частом в машинах, скорости различных точек системы в один и тот же момент пропорциональны расстояниям r этих точек до неподвижной оси вращения. Это выражается формулой $\gamma = wr$, в которой величина ω, скорость точки, которая, будучи связана с системой, находилась бы на единичном расстоянии от оси, называется угловой скоростью твердого тела в рассматриваемый момент. Если ω изменяется со временем, величина $\frac{dw}{dt}$ есть угловое ускорение, которое постоянно, когда вращательное движение является равномерно-переменным.
3. Цилиндрическое качение, имеющее место, когда твердое тело неизменно связано с любым основанием, которая катится без скольжения по другой неподвижной цилиндрической поверхности. В любой момент направления и соотношения скоростей различных точек системы те же, как если бы в этот момент линия касания двух цилиндров была неподвижна. Эта линия, которая на самом деле не неподвижна, но скорость которой равна нулю в момент касания, называется мгновенной осью вращения. В действительности дуги, описываемые даже за очень короткие промежутки времени, не являются дугами окружностей.
4. Вращение вокруг неподвижной точки, которое имеет место, когда система неизменно связана с точкой, остающейся неподвижной во время движения системы. В любой момент существует мгновенная ось вращения, как если бы система была связана с конической поверхностью, катящейся без скольжения по другой неподвижной поверхности, имеющей ту же вершину.
5. Сложное движение, состоящее из переносного и вращения вокруг оси, имеющее место, когда прямая AB, неизменно связанная с твердым телом, совершает общее поступательное движение, криволинейное или прямолинейное, и, следовательно, остается параллельной своему начальному положению, в то время как точки системы, находящиеся вне этой прямой, имеют иное движение. Тогда говорят, что движение твердого тела составлено из поступательного движения прямой AB и относительного вращения вокруг этой оси — выражение, которое относится к понятиям, изложенным в пунктах 12, 14, 15, 16.
6. Сложное движение, состоящее из переносного и вращения вокруг точки. Каково бы ни было движение твердого тела, если представить, что через

одну из его точек A проведены три координатные оси, увлекаемые вместе с этой точкой A, но остающиеся параллельными своим начальным направлениям, то движение системы относительно этих трех осей сводится к вращению вокруг точки A, рассматриваемой как неподвижная (4°). Таким образом, самое общее движение твердого тела может рассматриваться как составленное из поступательного движения, определяемого абсолютным движением любой его точки, и относительного вращения вокруг этой точки.

§: 3 О силах, рассматриваемых независимо от измерения их эффектов.

18. Сила есть необходимая и достаточная причина для изменения величины или направления скорости материальной точки.

Мы получаем о ней представление через ощущение усилий, которые мы прилагаем к телам. Точка, на которую действует сила и без которой она не может существовать, называется точкой приложения.

Несколько сил могут быть одновременно приложены к одной и той же точке вдоль одной прямой. Единственная сила, которой они эквивалентны, называется их суммой. Отсюда понятие отношения двух сил.

Всякая сила сравнима с весом, то есть с действием силы тяжести на некоторое тело в определенном месте. Единица силы произвольна. В численных приложениях мы примем килограмм.

19. Если спроецировать силу F на ось x, получим силу $F\cos(F\,,\,x)$ или, для краткости, F_x, положительную или отрицательную, в то время как сила F в пространстве обычно не имеет знака.

20. В настоящее время обычно соглашаются более не допускать мгновенных сил, предположительно не имеющих длительности и способных вызывать в телах резкие изменения скорости, без прохождения ими промежуточных состояний. Следовательно, всякая сила имеет некоторую длительность.(*)

21. Если проекция F_x силы постоянна в течение времени t, произведение $F_x t$ будет называться импульсом силы F вдоль оси x за время t. Если сила F_x переменна, её импульс за время $t-t_0$ равен:

$$\int_{t_0}^{t} F_x\,dt\,.$$

(*) Доктрина, отталкивающая мгновенные силы, была провозглашена г-ном Понселе в Артиллерийской и инженерной школе в Меце еще в 1825 году и г-ном Кориолисом в его "трактате Об исчислении действия машин", опубликованном только в 1829 году, но написанном несколькими годами ранее. Она была принята Мистером Пуассоном во 2-м издании его трактата по механике в 1835 году.

22. Если точка приложения силы F описывает прямую или кривую линию по каким-либо причинам, и если обозначить через ds элемент пройденного пути, то величина $F\ ds\cos(F\ ,\ ds)$ есть элементарная работа силы F за время прохождения дуги ds. Её можно рассматривать в двух аспектах: $F\ ds\cos(ds\ ,\ F)$ и $ds\ x\ F\cos(F\ ,\ ds)$. Интеграл этого дифференциала есть работа силы F между теми же пределами. Это выражается обозначением $\varphi F = \int F\ ds\cos(F\ ,\ ds)$. В зависимости от того, положительна она или отрицательна, работа называется движущей работой или работой сопротивления. Сила, работа которой положительна или является движущей, есть движущая сила; сила, работа которой отрицательна или является сопротивлением, есть сила сопротивления.(*)

23. Выражение «работа силы», предложенное г-ном Кориолисом и принятое г-ном Понселе в его курсах, до сих пор не является исключительно употребляемым механиками. Эта же величина называлась Монжем и Гашеттом динамический эффект, Кулоном и Навье — количество действия. Мы примем за единицу килограммометр = 1к х 1м. Монгольфье, Гашетт, Клеман называли динамической единицей или динамией работу в 1000 килограммометров; г-н Кориолис назвал её динамод (dynamode). Г-н Дюпен называл динам (dyname) непрерывную работу, которая составила бы миллион килограммометров за 24 часа: употребление до сих пор не закрепило эти названия.

24. Работа силы на определенном пути её точки приложения, по определению, есть величина, не зависящая от времени, то есть от длительности этого пути. Иногда требуется обозначить неопределенно продолжительную работу, которая сохраняет равные значения за равные промежутки времени; можно было бы принять за единицу такой работы килограммометр в секунду, но практикующие механики начинают соглашаться называть лошадиной силой или динамической лошадью непрерывную работу в 75 килограммометров в секунду. Мы полагаем, что неправильно эту величину иногда называют «силой лошади», что является некорректным переводом английского выражения «horse power», «мощность лошади», где слово «мощность» имеет смысл способности совершать работу. Важно не путать простое понятие силы со сложным понятием работы. Сила выражается в килограммах; работа или механическая мощность выражается в килограммометрах.

25. При расчете эффекта сил, приложенных к различным точкам материальной системы, часто приходится рассматривать алгебраическую сумму работ этих сил (39), отсюда полезность следующих предложений, из которых второе, впрочем, очевидно.

26. Теорема. Когда две равные и прямо противоположные силы приложены к двум движущимся точкам, если интенсивность этих сил постоянна или изменяется только в зависимости от расстояния между двумя точками, сумма их работ зависит только от относительного движения двух точек и, следовательно, равна работе, которую произвела бы одна из двух сил, если бы движение точки, к которой она приложена, сводилось к удалению от другой точки или приближению к ней, считающейся неподвижной.

(*) См. в уже цитированном меморандуме г-на Морина описание устройств, предназначенных для измерения либо импульса, либо работы, развиваемой двигателем.

27. Теорема. Если твердое тело обладает общим поступательным движением (17, 1°), сумма элементарных работ приложенных к нему сил за бесконечно малое перемещение системы равна элементарному пути одной из его точек, умноженному на сумму проекций сил на ось, параллельную скорости переносного движения.

28. Теорема. Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, сумма элементарных работ приложенных к нему сил за бесконечно малое угловое перемещение системы равна этому угловому перемещению (т. е. отношению дуги, описанной любой точкой, к её радиусу), умноженному на алгебраическую сумму моментов сил относительно оси вращения.

Здесь под моментом силы относительно оси понимается произведение, получаемое умножением проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, на расстояние силы до оси, и снабжением результата знаком + или -, соответствующим работе силы при рассматриваемом вращательном движении. Рассматривая силу F, её момент относительно оси x будет обозначаться

$$M\{F\}_x .$$

§: 4. Динамика материальной точки.

1° Прямолинейное движение

29. Если сила, действующая на материальную точку, движущуюся по вертикали, есть её вес . . . . . $\boldsymbol{P}$.

Её ускорение в любой момент не зависит от природы тела и от приобретенной скорости. В Париже, принимая метр и секунду за единицы, это ускорение равно 9,8088; мы всегда будем обозначать его . . . . . $\boldsymbol{g}$.

Под действием другой силы . . . . . $\boldsymbol{F}$.

Направленной вдоль той же прямой, что и предварительно приобретенная скорость, то же тело получает ускорение $\frac{dv}{dt}$, обозначаемое . . . . . $\boldsymbol{J}$.

Приняв это, закон природы, который можно назвать принципом относительности поступательных движений, дает

$$\frac{F}{J} = \frac{P}{g}$$

30. Если два тела под действием одной и той же силы получают одинаковое ускорение, говорят, что они имеют одинаковую массу. Если нет, их массы пропорциональны значениям отношения $\frac{F}{J}$, переменного для разных тел, но постоянного для одного и того же тела; и так как условились принимать за единицу массы массу тела, которое под действием единицы силы получает единичное ускорение,

отношение $\frac{F}{J}$ становится числовым выражением массы: если обозначить её через m, имеем:

$$\frac{F}{J} = m \quad \text{или} \quad \frac{F}{m} = \frac{dv}{dt} \quad \text{или} \quad F\ dt = m dv\ ;$$

принимая положительное направление силы и скорости одинаковыми и придавая F и dv знаки, принадлежащие им в силу этого соглашения.

31. Из последнего уравнения получаем

$$\int_{t_0}^{t} F\ dt = mv - mv_0$$

то есть импульс силы F равен алгебраическому приращению количества движения между теми же пределами.

32. Два уравнения

$$F\ dt = m dv \qquad \text{и} \qquad \frac{dx}{dt} = v$$

позволяют исключить dt и дают

$$F\ dx = mv dv \quad \text{откуда} \quad \int_{x_0}^{x} F\ dx = \frac{1}{2}\ mv^2 - \frac{1}{2}\ mv_0^2\ .$$

$\int F\ dx$ есть работа силы F. Если $v_0 = 0$, величина $\frac{1}{2} mv^2$ равна положительной или движущей работе, которая сообщила эту скорость телу массы m; следовательно, она представляет эффект этой работы. Если $v = 0$, величина $-\frac{1}{2} mv_0^2$ равна отрицательной работе или работе сопротивления, которую тело получило с момента, когда его скорость была v_0, до момента, когда эта скорость была уничтожена; величина $\frac{1}{2} mv_0^2$ выражает, следовательно, способность, которой обладало рассматриваемое тело, преодолевать работу сопротивления благодаря своей массе и скорости.

Эта величина составляет половину того, что большинство авторов называют живой силой, выражения, родившегося из применения слова сила к способности совершать работу движителей. Мы называем её мощность живого действия, где слово мощность соответствует идее этой способности, а эпитет живого — идее скорости.

2° Криволинейное движение

33. Предыдущие понятия распространяются на криволинейное движение, которое можно рассматривать двумя способами.

Это движение может быть спроецировано на ось, и уравнения пунктов 30, 31 и 32 сохраняются при условии замены 1° силы F на сумму $\sum F_x$ проекций сил на ось, принятую за ось x, 2° скоростей v, v_0 на их проекции v_x, v_{0x} на ту же ось. Это выражают,

говоря, что: проекция материальной точки на ось движется так же, как материальная точка той же массы, имеющая начальную скорость, равную проекции начальной скорости точки в пространстве, и на которую действует сила, равная алгебраической сумме проекций одновременных сил.

Легко доказывается, что, каковы бы ни были силы, приложенные к одной точке, можно найти единственную силу, называемую их равнодействующей, проекция которой на любую ось была бы равна сумме проекций рассматриваемых реальных сил. Обозначая эту равнодействующую через R, аналитическое выражение предыдущего утверждения есть

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{R_x}{m} \qquad \text{откуда} \qquad mv_x - m_{0x} = \int R_x\, dt\ ,$$

формулы, в которых можно заменить R_x на ΣF_x .

Криволинейное движение может рассматриваться вдоль реально описываемой кривой, но отвлекаясь от кривизны пройденного пути. Уравнения пунктов 30, 31 и 32 также существуют при условии замены 1) прямолинейных расстояний x, x_0 на расстояния s, s_0, отсчитываемые вдоль описываемой кривой, и 2° силы F на касательную силу $\varphi = \sum F \cos(F\ ,\ d_s)$ или $R\cos(R\ ,\ d_s)$.

Имеем, следовательно,

$$v = \frac{ds}{dt}\ ,\quad \frac{dv}{dt} = \frac{\sum F\cos(F\ ,\ ds)}{m} = \frac{R\cos(R\ ,\ ds)}{m}$$

откуда

$$mv - mv_0 = \sum \int F\cos(F\ ,\ ds)\, dl = \int R\cos(R\ ,\ ds)\, dt$$

и

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \sum \int F\cos(F\ ,\ ds) = \sum \zeta\{F\} = \zeta\{R\}$$

Если разложить равнодействующую R на две прямоугольные составляющие, из которых одна является касательной силой φ, другая составляющая ψ лежит в плоскости описываемой кривой или в соприкасающейся плоскости (если кривая двоякой кривизны), направлена по нормали к этой кривой и идет от кривой к центру кривизны. Эта нормальная сила есть центростремительная сила; её выражение, обозначая через r радиус кривизны, есть

$$\psi = \frac{mv^2}{r} \qquad \text{или} \qquad \psi = m\omega^2 r$$

называя ω угловой скоростью вокруг центра кривизны.

§: 5 Общие принципы движения системы материальных точек

34. Система материальных точек подвержена двум видам сил: внешним, обусловленным телами, не входящими в систему, и взаимным — между элементами системы.

35. Теорема о количестве движения любой системы может быть сведена к следующим словам: сумма количеств движения, спроецированных на любую ось, не зависит от взаимных действий и, следовательно, её приращение равно сумме импульсов внешних сил, спроецированных на ту же ось. Аналитическое выражение этого принципа, обозначая через F внешние силы, есть:

$$\sum mv_x - \sum mv_{0x} = \sum \int F_x \, dt \, .$$

36. Теорема о движении центра тяжести состоит в том, что центр тяжести любой системы движется как материальная точка, которая соединяла бы в себе одной массу $\sum m$ системы и на которую действовали бы внешние силы, перенесенные в эту точку параллельно самим себе. Таким образом, все свойства, напомненные в §: 4, применимы без каких-либо изменений к движению центра тяжести любой материальной системы, твердой или нетвердой, при условии фиктивного переноса внешних сил и массы системы в эту точку.

37. В случае, когда тело твердое, не только центр тяжести движется так, как если бы все силы были туда перенесены, но, кроме того, тело вращается вокруг этой точки так, как если бы она была неподвижна, а внешние силы оставались теми же по интенсивности и направлению, проходя через свои реальные точки приложения.

39. Теорема об эффекте работы состоит в том, что приращение мощности живого действия системы равно работе внешних сил плюс работе взаимных действий, зависящей исключительно от относительного движения точек системы.

Аналитическое выражение этого принципа есть

$$\sum \frac{1}{2} mv_x - \sum \frac{1}{2} mv_0^2 = \sum \zeta \{F\} + \sum \int fdl$$

обозначая через f взаимные силы, считая их положительными, когда они отталкивающие, и через dl изменение расстояния между двумя точками системы, между которыми действует сила f.

40. В случае, когда система предполагается твердой, изменения расстояния dl равны нулю, и член $\sum \int fdl$ исчезает. То же исчезновение допустимо в случае маловязкой жидкости, молекулы которой имеют относительно медленное относительное движение. Опыт показывает, в каком случае эта гипотеза допустима.

41. Член $\sum \zeta F$ принимает простое выражение, когда речь идет о работе силы тяжести: он равен весу системы, умноженному на вертикальную высоту, на которую

опустился центр тяжести. Если бы центр тяжести поднялся, эта работа была бы отрицательной.

42. Член $\sum \frac{1}{2} mv^2$ также принимает простое выражение, когда речь идет о твердом теле, вращающемся вокруг оси. Это выражение мощности живого действия есть:

$$\frac{1}{2} w^2 \sum mr^2$$

где ω — угловая скорость, m — масса одной из точек системы, а r — её расстояние до оси вращения. Сумма $\sum mr^2$ называется моментом инерции твердого тела относительно неподвижной оси, вокруг которой оно вращается.

43. Вычисление работы сил является наиболее существенной целью динамической теории машин. Интенсивностью сил, действующих в различных точках этих устройств для обеспечения прочности их конструкции и для возможности учета трения, занимаются с второстепенной точки зрения. Так, усилие или давление, которое двигатель способен оказать на свой приемник, т. е. на точки его приложения в машине, имеет второстепенное значение; то же самое относится и к интенсивности силы, которую необходимо приложить в определенных точках станка, чтобы привести его в движение или поддерживать его в движении. Главный вопрос, касающийся двигателя, заключается в том, чтобы знать, какую работу он совершает на своем приемнике, а касательно станка — какую работу он требует для функционирования. Когда эти два вопроса решены, с помощью опыта и теории, общий принцип эффекта работы показывает, что если бы можно было установить между приемником и инструментом передаточный механизм без ударов и трения, то достаточно было бы разделить работу, которую дает двигатель, на работу, которую требует станок, чтобы узнать, сколько подобных машин двигатель мог бы поддерживать в движении. Этот результат является верхним пределом, которого никогда нельзя достичь, потому что всегда нужно вычитать из работы двигателя работу сопротивления, обусловленную трением и ударами частей передаточного механизма друг о друга и об их опоры.

44. В 18-м веке много спорили об измерении сил движущихся тел. В очень простом случае твердого тела, обладающего общим поступательным движением, вопрос сводили к тому, «становится ли сила тела, имеющего определенную скорость, двойной или четверной, когда его скорость удваивается(*)». Очевидно, что тогда придавали слову «сила» смысл, отличный от того, который принимаем мы (18); и действительно, допускали существование мгновенных сил (20) и, говоря о движущемся и предоставленном самому себе теле, говорили, что его сила остается той же самой, что эта сила сохраняется непрерывно(**), как если бы она в каждый момент была актуальной причиной движения. Согласно современным представлениям, сила — это не сохраняющаяся причина всякого существующего движения, а причина, изменяющая

(*) Д'Аламбер: *похвала Бернулли*.
(**)Лаплас: *изложение системы мира*. Книга. 3 Глава. 2.

всякое переменное движение. Тело, предоставленное самому себе, не оказывает и не испытывает в данный момент никакой силы; и если спросить, какая сила произвела это движение или какая его уничтожила бы, этот вопрос является неопределенным: но количество движения mv рассматриваемого тела дает знать об импульсе $\int F\,dt$ искомой силы, который удваивается, когда скорость удваивается; в то время как мощность живого действия $\frac{1}{2}mv^2$ дает знать о работе $\int F\,dv$ этой силы, которая становится четверной, когда скорость удваивается. Таким образом, философы, которые, как Ньютон и Эйлер, измеряли то, что они называли силой движущегося тела, произведением его массы на его скорость, называли силой сложную величину, которую мы называем импульсом; а те, кто, как Лейбниц и Бернулли, принимали за меру произведение массы на квадрат скорости, давали имя силы сложной величине, которую мы называем работой.

§: 6 Статика, или общие условия равновесия тел

45. Когда материальная система, твердая или нетвердая, находится в покое, каждая её точка находится в равновесии под влиянием присущих ей сил F и взаимных действий f, которые она получает от других точек системы. Если представить, что под действием сил F система, кроме того, свободна в пространстве, можно представить бесконечное множество возможных движений системы, при которых силы следуют за своими точками приложения. Эти движения, существующие только в мысли, называются виртуальными движениями и обычно предполагаются бесконечно малыми. Если среди виртуальных движений рассматривать только те, в которых взаимные расстояния точек системы остаются неизменными, мы имеем виртуальные движения, совместимые с твердостью системы. Система находится в равновесии; очевидно, что для того чтобы реально произвести одно из этих последних движений, достаточно было бы одновременно приложить к каждой из точек системы некоторую силу φ, постоянную или переменную, способную определить движение, свойственное этой точке, как если бы она была свободна. Следовательно, применяя к каждой точке теорему пункта 32 и суммируя полученные таким образом уравнения, получим после любого перемещения:

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 = \sum \zeta\{\varphi\}$$

Но так как речь идет о системе, подверженной тогда двум видам внешних сил, обозначенных F и φ, и поскольку взаимные действия не производят никакой работы в этой системе, различные точки которой сохраняют свои расстояния, согласно пункту 39 имеем

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 = \sum \zeta\{F\} + \sum \zeta\{\varphi\}\,.$$

Из этих двух уравнений заключаем $\sum \zeta \{F\} = 0$; это и составляет теорему о виртуальной работе (или, согласно обычному выражению, теорему о виртуальных скоростях), которую можно сформулировать так:

Теорема. Для равновесия любой материальной системы необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма работ внешних сил равнялась нулю для любого виртуального движения, совместимого со связями системы.

Отсюда выводятся, как будет показано, шесть общих условий равновесия системы.

46. Если в качестве виртуального движения выбрать общее поступательное движение, параллельное оси x, называя ξ общее перемещение всех точек, получим (27)

$$\sum \zeta \{F\} = \xi \sum F_x \text{ ; следовательно, } \sum F_x = 0. .$$

Таким образом, для трех координатных осей имеем

$$\sum F_x = 0 , \qquad \sum F_y = 0 , \qquad \sum F_z = 0 ;$$

что равносильно утверждению, что центр тяжести системы остается в покое, если он там первоначально находился.

47. Если в качестве виртуального движения выбрать вращение вокруг оси x, обозначая через σ дугу, описанную точкой, связанной с системой и находящейся на единичном расстоянии от оси, имеем (28)

$$\sum \zeta \{F\} = \sigma \sum M \{F\}_x ; \qquad \text{следовательно} \qquad \sum M \{F\}_x = 0 .$$

Таким образом, для трех координатных осей имеем

$$\sum M \{F\}_x = 0 , \qquad \sum M \{F\}_y = 0 , \qquad \sum M \{F\}_z = 0 .$$

48. Когда рассматриваемая система предполагается твердой (гипотеза, которая никогда полностью не реализуется), шести предыдущих условий более чем достаточно для равновесия. Чтобы это доказать, сначала устанавливают следующее предложение:

Теорема. Когда в системе точек приложения каких-либо сил рассматриваются только виртуальные движения, совместимые с твердостью, силы, каковы бы они ни были, всегда могут быть сведены к двум, из которых по крайней мере одна проходит через заданную точку, без изменения суммы виртуальных работ; то есть при всех движениях указанного вида эти две силы, называемые эквивалентными реальным силам, дают ту же сумму виртуальной работы, что и реальные силы. Когда две эквивалентные силы сводятся к одной, эта единственная сила называется равнодействующей реальных сил.

49. Приняв это, легко доказывается, что когда выполняются шесть уравнений пунктов 46 и 47, две эквивалентные силы равны и противоположны; что, таким образом, равнодействующая равна нулю; что, следовательно, система, если она предполагается твердой, необходимо находится в равновесии, потому что не может быть приобретенной скорости без работы. Это предложение и предложения пунктов 46 и 47 резюмируются в следующих выражениях:

Теорема. В системе, находящейся в равновесии, сумма проекций внешних сил на любую ось равна нулю, и сумма моментов этих же сил относительно любой оси также равна нулю. Если система твердая, для того чтобы равновесие имело место, достаточно, чтобы двойное условие для проекций и для моментов выполнялось для трех осей, пересекающихся в одной точке и не лежащих в одной плоскости.

50. Частные случаи равновесия сил, лежащих в одной плоскости, и параллельных сил в пространстве, содержатся в этой общей теореме.

Глава 2. *Применение статики к шарнирным системам без трения.*

§:1 Теория, применимая к висячим мостам

51. Предполагается, что общая нагрузка распределена по точкам крепления вертикальных подвесок; таким образом, цепь или кабель уподобляются *веревочному многоугольнику*. Натяжения подвесок предполагаются такими же, как если бы пролеты, вместо того чтобы образовывать жесткую систему, были просто шарнирно соединены, так что равноотстоящие подвески несут равные нагрузки.

Вот по этому поводу теорема, которая не предполагает подвески равноотстоящими; следующее доказательство было указано г-ном Гийбоном (*Анналы мостов и дорог* - январь 1839 г.):

Если вершины веревочного многоугольника несут вертикальные нагрузки, пропорциональные расстояниям между подвесками, то есть так, что если δ', δ'' — горизонтальные проекции расстояний между тремя последовательными вершинами, нагрузка промежуточной вершины представляется как $p\frac{\delta'+\delta''}{2}$, обозначая через p вес, соответствующий единице горизонтальной длины, то все вершины лежат на параболе второй степени, главная ось которой вертикальна.

Пусть (фиг. 1)

M_0, M_1, M_2, ... M_n, — несколько последовательных вершин веревочного многоугольника, заключающих между собой n сторон этого многоугольника;

Y_0, Y_1, Y_2, ... Y_n, — их вертикальные ординаты над произвольной горизонталью 0_x;

$X_0, X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots X_n$, — их абсциссы $OP_0, OP_1, OP_2, \ldots OP_n$, от точки O, проекции середины стороны NM_0, предшествующей вершине M_0 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ — углы, которые составляют над горизонтом стороны $NM_0, M_0M_1, M_1M_2, \ldots\ldots\ldots M_{n-1}M_n$.

T_0, T_1, T_2, ... T_n, — натяжения этих же сторон.

Часть многоугольника M_0, M_1, ... M_{n-1} подвержена двум видам внешних сил: одни вертикальны, и их сумма равна p, умноженному на $\frac{x_n+x_{n-1}}{2}$, расстояние от точки O до середины интервала $P_{n-1}P_n$; другие — два натяжения T_0, T_n, направленные первое — по M_0N, второе — по $M_{n-1}M_n$.

Применяя к этим силам формулы пункта 46, имеем:

$$T_n \sin \alpha_n = p\,\frac{x_n + x_{n-1}}{2} + T_0 \sin \alpha_0 \quad ,$$

и

$$T_n \cos \alpha_n = T_0 \cos \alpha_0$$

Последнее уравнение, применимое к любым двум натяжениям, выражает, что горизонтальные проекции всех натяжений имеют постоянную величину. Мы будем обозначать её через T_x.

Из этих двух уравнений, согласно этому обозначению, имеем:

$$\tan \alpha_n = \frac{p}{2\,T_x}\left(x_n + x_{n-1}\right) + \tan \alpha_0$$

Но $$\tan \alpha_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\ .$$

Подставляя, находим:

$$y_n - y_{n-1} = \frac{p}{2\,T_x}\left(x_n^2 - x_{n-1}^2\right) + \tan \alpha_0 \left(x_n - x_{n-1}\right)$$

Если в этой формуле последовательно принять $n = 1, 2, 3\ .\ .\ .\ .\ .\ n$, получим n уравнений. Складывая их и затем опуская индекс n, получаем формулу, применимую к любой сумме:

$$y - y_0 = \frac{p}{2\,T_x}\left(x^2 - x_0^2\right) + \tan \alpha_0 \left(x - x_0\right)\ ,$$

что и доказывает высказанное предложение.

Замечание. Если изменить начало координат, перенося оси параллельно, уравнение сохранит ту же форму

$$y = \alpha\, x^2 + bx + c$$

и коэффициент α при x^2 всегда будет равен $\frac{p}{2\,T_x}$.

52. Трех точек, или двух точек и положения горизонтальной касательной, достаточно для определения рассматриваемой параболы. Найдя коэффициент α при x^2 как функцию координат заданных точек, выведем T_x из соотношения $\alpha = \frac{p}{2\,T_x}$

откуда $$T_x = \frac{p}{2\,\alpha}$$

Затем получим любое натяжение T_n по формуле $T_n \cos \alpha_n = T_x$,

в которой сделают

$$\cos \alpha_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{\left(y_n - y_{n-1}\right)^2 + \left(x_n - x^{n-1}\right)^2}}$$

53. Применение предыдущей теории к одной из цепей висячего моста непосредственно, когда предполагается, что поддерживаемые веса пропорциональны длинам частей настила, спроецированным горизонтально. Следует заметить, что точка A' (фиг. 2), где цепь встречает вертикаль точки опоры настила на устое, лежит на параболе,

проходящей через все вершины многоугольника, но точка крепления цепи находится вне этой кривой, если она отличается от A'.

54. На практике подвески равноотстоят друг от друга и имеют равные натяжения. Подвески, лежащие в одной плоскости, часто поддерживаются несколькими независимыми цепями. Кривая, на которой должны тогда находиться вершины каждого веревочного многоугольника, одна и та же для всех цепей, и её можно определить, как и сумму их натяжений, рассуждая так, как если бы была только одна цепь. Затем располагают подвески таким образом, чтобы реализовать один из следующих случаев:

1-й случай (фиг. 3) Обе нижние стороны симметричны относительно вертикали, что имеет место, когда между двумя точками, находящимися на одном уровне, имеется четное число сторон.

В этом случае M_0 — вершина параболы. Её уравнение, отнесенное к осям координат O_x и O_y, имеет вид

$$y = ax^2$$

Коэффициент a всегда связан с горизонтальным натяжением (51) соотношением $a = \frac{p}{2T_x}$, и положения одной только точки кривой относительно осей достаточно для определения постоянной a, независимо от веса p и натяжения T_x.. Пусть, например, заданы стрела $BM_0 = p$ и полухорда $A'B = c$; получим

$$\mathrm{p} = \mathrm{ac}^2 \qquad \text{откуда} \qquad a = \frac{p}{c^2}$$

и для любой вершины $y = \frac{p}{c^2} x^2$.

2-й случай (фиг. 4) Одна сторона горизонтальна; она тогда самая нижняя из всех. Это происходит, когда между двумя точками, находящимися на одном уровне, имеется нечетное число сторон. В этом случае вершина параболы находится на вертикали, проходящей через середину горизонтальной стороны, и если принять за начало координат эту середину, которая не лежит на кривой, уравнение имеет вид $y = ax^2 + b$; и так как кривая проходит через M_0, имеем $O = ax_0^2 + b$ и уравнение становится (как можно было бы получить, положив $y_0 = 0$ и $\tan \alpha_0 = 0$ в окончательном уравнении пункта 51)

$$y = a\left(x^2 - x_0^2\right)$$

x_0 тогда есть половина горизонтальной стороны, т. е. половина интервала между любыми двумя подвесками.

Пусть заданы стрела $BO = b$ и полухорда $A'B = c$;

получим $p = a\left(c^2 - x_0^2\right)$ откуда $\alpha = \frac{p}{c^2 - x_0^2}$

и для любой вершины $y = \frac{p}{c^2 - x_0^2}(x^2 - x_0^2)$.

55. В обоих предыдущих случаях горизонтальное натяжение T_x находится из соотношения $T_x = \frac{pc^2}{2p}$; во втором случае $T_x = \frac{P(c^2 - x_0^2)}{2p}$.

Натяжение любой стороны многоугольника находится, как показано в пункте 52, замечая, что разность $x_n - x_{n-1}$ есть постоянный интервал между двумя последовательными подвесками; а $y_n - y_{n-1}$, разность двух последовательных ординат, будет выведена из уравнения кривой.

56. Если настил находится в плоскости, длина подвесок, являясь равноотстоящими ординатами параболы, параллельной главной оси, их вторые разности равны между собой. Следовательно, достаточно вычислить три из этих ординат, чтобы получить остальные путем простых сложений. То же самое будет, когда продольный профиль настила будет параболой с вертикальной главной осью.

57. Из уравнения

$$T_n \cos \alpha_n = T_x \qquad \text{следует, что} \qquad T_n = \frac{T_x}{\cos \alpha_n} \quad .$$

т. е. натяжение увеличивается с наклоном сторон цепи.

Оно увеличивается пропорционально их длине; ибо, называя δ интервал между двумя последовательными подвесками, а l_n — длину стороны, натяжение которой T_n, имеем

$$\cos \alpha_n = \frac{\delta}{l_n} , \qquad \text{откуда} \qquad T_n = \frac{T_x l_n}{\delta}$$

Если α — угол последней стороны с горизонтом, а T — её натяжение, которое является наибольшим в цепи, имеем

$$T = \frac{T_x}{\cos \alpha} .$$

Но это максимальное натяжение приближенно определяется, замечая, что наклон последней стороны немного меньше наклона касательной к параболе в A'. Уравнение этой параболы, согласно случаям, есть

$$y = ax^2 \qquad \text{или} \qquad y = a(x^2 - x_0^2) ,$$

имеем всегда $\frac{dy}{dx} = 2ax$. Если поэтому обозначить через β угол касательной в крайней точке, имеющей абсциссу $x = c$, с горизонтом, получим

$$\tan \beta = 2ac \qquad \text{откуда} \qquad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2 c^2}} .$$

Так как $\beta > \alpha$, то $\beta < \cos \alpha$ (поскольку углы α и β меньше прямого угла).

Следовательно, $\frac{T_x}{\cos\alpha}$ или $T < \frac{T_x}{\cos\beta}$.

Подставляя значение a, получим в первом случае ($a = \frac{p}{c^2}$)

$$T < \frac{pc^2}{2p}\sqrt{1+\frac{4p^2}{c^2}};$$

во втором случае ($a = \frac{p}{c^2 - x_0^2}$)

$$T < \frac{p(c^2 - x_0^2)}{2p}\sqrt{1+\frac{4b^2c^2}{(c^2 - x_0^2)^2}}$$

Когда число подвесок очень велико, x_0 очень мало по сравнению с C, и можно без возможной ошибки принять в обоих случаях

$$T = \frac{pc^2}{2p}\sqrt{1+\frac{4p^2}{c^2}}.$$

58. Можно непосредственно вычислить сумму длин частей подвесок, расположенных выше горизонтали, проходящей через самые низкие вершины многоугольника.

1-й случай (54). Уравнение параболы

$$y = ax^2 \qquad \text{и} \quad a = \frac{p}{c^2}.$$

Обозначим через n число подвесок от самой нижней точки цепи до вершины M_n, и через δ постоянный интервал между двумя последовательными подвесками.

Для точек $M_0, M_1, M_2, M_3 \ldots\ldots M_n$,

имеющих абсциссы $0, \delta, 2\delta, 3\delta \ldots\ldots\ldots\ldots n\delta$,

ординаты будут $0, a\delta^2, a(2\delta)^2, a(3\delta)^2, \ldots\ldots a(n\delta)^2$.

Искомая сумма есть $a\delta^2(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+n^2)$.

Сумма квадратов последовательных целых чисел от *1* до n выражается как

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Следовательно, искомая сумма равна

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\frac{p\delta^2}{c^2}$$

2-й случай (54). Уравнение параболы во 2-м случае:

$$y = a(x^2 - x_0^2),$$

где $a = \frac{p}{c^2 - x_0^2}$ и $x_0 = \frac{1}{2}\delta$,

Для точек $M_0, M_1, M_2, M_3 \ldots\ldots M_n$,

имеющих абсциссы $x_0, 3x_0, 5x_0, 7x_0, \ldots (2n+1)x_0$,

ординаты равны $0,\ a(3^2-1)x_0^2,\ a(5^2-1)x_0^2,\ a(7^2-1)x_0^2,\ \ldots\ a[(2n+1)^2-1]x_0^2.$

Их сумма есть $a\,x_0^2\,[1+3^2+5^2+7^{2\cdots}+(2n+1)^2]-a\,x_0^2\,(n+1).$

Сумма квадратов последовательных нечетных чисел выражается как

$$\frac{1}{6}(2n+1)(2n+2)(2n+3).$$

Следовательно, поставив для x_0 и a их значения $x_0=\frac{\delta}{2}$ и $a=\frac{4p}{4c^2-\delta^2}$,

искомая сумма будет равна

$$\left[\frac{1}{6}(2n+1)(2n+2)(2n+3)-(n-1)\right].\frac{p\,\delta^2}{4c^2-\delta^2}\ .$$

59. Длина l каждой стороны цепи может быть точно вычислена по формуле

$$l_n=\sqrt{\delta^2+(y_n-y_{n-1})^2}$$

Но полезно иметь непосредственно общую длину полуцепи, начиная от самой нижней точки или от середины горизонтальной стороны; её можно получить приближенно.

Эта длина мало отличается от длины описанной параболы. Элемент ds этой кривой выражается как

$$\sqrt{dx^2+dy^2}\qquad\text{или}\qquad dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Из уравнений $y=ax^2$ и $y=a\,(x^2-x_0^2)$ также получаем

$$\frac{dy}{dx}=2\,ax\qquad\text{откуда}\qquad ds=\sqrt{1+4\,a^2\,x^2}\,dx\ .$$

Но обычно наклон $\frac{dy}{dx}$ мал по сравнению с *1*, и можно без заметной ошибки заменить величину под радикалом на $(1+2\,a^2\,x^2)^2$, которая отличается от неё только на $\frac{1}{4.}(\frac{dy}{dx})^4$. Находим, таким образом, что элемент ds немного меньше, чем $(1+2\,a^2\,x^2)\,dx$. Интегрируя, заключаем, что s от начала до абсциссы C немного меньше, чем $c+\frac{2}{3}a^2\,c^3$. В первом случае значение a равно $\frac{p}{c^2}$, а во втором — $\frac{p}{c^2-\frac{1}{4}\delta^2}$; но можно пренебречь $\frac{1}{4}\delta^2$ по сравнению с c^2; так что приближенное выражение длины полуцепи в обоих случаях есть

$$s=\left(1+\frac{2}{3}\,\frac{p^2}{c^2}\right)c$$

60. Если длина s получает небольшое приращение, например, из-за изменения температуры, и требуется вычислить соответствующее приращение стрелы p, то это достигается, рассматривая эти приращения как бесконечно малые и дифференцируя приведенное выше уравнение, что сводится к пренебрежению квадратом приращения p.

Получим $ds=\frac{4}{3}\,\frac{p}{c}\,dp$ откуда $dp=\frac{3}{4}\,\frac{c}{p}\,.\,ds$;

так как s мало отличается от c, если записать это уравнение в виде

$$\frac{dp}{p} = \frac{3}{4}\frac{c^2}{p^2}\cdot\frac{ds}{s},$$

видно, что относительное приращение p намного больше, чем относительное приращение s.

§:2 Многоугольные системы твердых тел с простыми шарнирами

61. Представим себе, что несколько твердых тел соприкасаются в точках, которые не могут разъединяться; причем никакое препятствие, никакое трение не препятствует вращательным движениям, совместимым с этим условием. Сначала остановимся на случае, когда каждое тело касается только двух других, каждое в одной точке, и система тогда будет многоугольной. Можно представить себе каждый шарнир как соединение типа «колено», состоящее из маленькой сферы, прикрепленной к одному из тел, и охватываемой частью полой сферы, принадлежащей другому телу (соединение типа «петля» допускает вращение только перпендикулярно оси и, следовательно, не предоставило бы системе всей свободы движения, предполагаемой здесь). Требуется изучить условия равновесия такой системы.

62. Сначала рассмотрим отдельно одно из твердых тел системы. На него действуют какие-либо внешние силы F_1, F_2, F_3, ... и, кроме того, также внешние давления, которые оно получает от двух тел, с которыми оно связано; и эти давления N', N'' проходят через центры C, D шаровых шарниров (фиг. 5), поскольку трение отсутствует. Шесть условий равновесия выполняются для совокупности этих сил и являются достаточными, так как речь идет о твердом теле.

Одно из этих условий может быть сделано независимым от давлений N', N'': оно состоит в том, что алгебраическая сумма моментов сил F_1, F_2, F_3, ... относительно прямой CD равна нулю, что, если принять CD за ось z, будет выражено обозначением

$$\sum M\{F\}_z = 0 .$$

Это условие равносильно утверждению, что силы F_1, F_2, F_3, ... могут быть сведены к двум эквивалентным, приложенным в точках C и D. В самом деле, известно (48), что во всех случаях можно заставить одну из эквивалентных проходить через любую точку; в данном случае момент второй эквивалентной должен быть равен нулю из-за , $\sum\{F\}_z = 0$ следовательно, эта сила лежит в одной плоскости с осью CD, и если соединить её точку приложения, какова бы она ни была, с точками C и D двумя прямыми, всегда можно разложить эту силу на две, проходящие через эти точки. Отсюда видно, что если центры шарниров C, D удерживаются бесконечным сопротивлением, условие $\sum M\{F\}_z = 0$ достаточно для обеспечения равновесия.

Пять других условий равновесия, которым всегда должны удовлетворять все внешние силы, включая давления N', N'', дадут соотношения между этими давлениями и силами F или их эквивалентами.

С этой целью, если через C провести две оси C_x, C_y, прямоугольные между собой и на Cz, обозначить через N'_x, N'_y, N'_z, N''_x, N''_y, N''_z, F_x, F_y, F_z проекции сил на оси, и положить $CD = l$, получим пять других уравнений, содержащих давления:

$$\sum M\left(F\right)_x + l\,N''_y = 0\ ,\quad \sum M\left(F\right)_y + l\,N''_x = 0\ ,\quad \sum F_x + N'_x + N''_x = 0\ ,\quad \sum F_y + N'_y + N''_y = 0\ ,$$

$$\sum F_z + N'_z + N''_z = 0\ ;$$

первые четыре достаточны для определения N'_x, N'_y, N''_x, N''_y; но последнее дает только сумму $N'_z + N''_z$.

Возьмем для примера тело, поддерживаемое двумя центрами токарного станка. Знание сил F, таких как вес тела, натяжение веревки, давление инструмента, определит давления, перпендикулярные оси, но не давления в направлении этой оси. В самом деле, можно представить, что, не нарушая равновесия, можно было бы изменять последние, лишь бы их алгебраическая сумма оставалась той же.

63. Рассмотрим теперь равновесие многоугольной системы твердых тел, соединенных между собой шарнирами.

Каждое тело, рассматриваемое отдельно, находится в равновесии (замечание, аналогичное первому в пункте 45), следовательно (62), силы F, действующие на это тело, помимо связей с двумя соседними телами, имеют алгебраическую сумму моментов, равную нулю относительно прямой, соединяющей центры этих шарниров; и поскольку это тело предполагается строго твердым, реальные силы F могут быть заменены, не нарушая равновесия, двумя эквивалентными, приложенными в этих двух шарнирах.

Произведя такое же изменение внешних сил для каждого твердого тела системы, мы преобразовали бы её в совокупность жестких тел, которые не подвергались бы никаким силам, кроме как в их точках сочленения; тогда форма и масса каждого тела стали бы безразличны для вопроса, лишь бы расстояние между этими двумя шарнирами оставалось тем же. Таким образом, систему можно было бы рассматривать как состоящую из прямолинейных жестких невесомых стержней, образующих многоугольник, к вершинам которого приложены внешние силы. Одним словом, мы получили бы систему, которая отличалась бы от собственно веревочного многоугольника только тем, что стороны были бы жесткими и могли бы, следовательно, испытывать продольное сжатие и выдерживать то, что можно было бы назвать отрицательным натяжением.

Это преобразование, о котором мы только что говорили, часто используется авторами; оно иногда может быть удобным, но оно не является необходимым, и несколько простых примеров покажут, как можно, не прибегая к нему, действовать при изучении условий равновесия системы шарнирно-сочлененных тел и при расчете давлений, возникающих в шарнирах.

64. Два тела, связанные между собой подвижным шарниром M (фиг. 6) и могущие вращаться вокруг неподвижных шарниров A, B, подвержены действию вертикальных сил F, F'', пересекающих прямые AM, MB. Требуется найти давления в A, B и M, которые важно знать, чтобы затем убедиться, могут ли части системы сопротивляться воспринимаемым усилиям. Для равновесия необходимо, чтобы плоскость AMB была вертикальна; ибо вся система находится в равновесии под действием сил F, F' и двух также внешних давлений, которые она получает в двух крайних шарнирах AB; отсюда легко заключить, что силы F, F' пересекают прямую AB. Пусть N, N' — эти давления в A и B, чьи горизонтальные и вертикальные проекции суть $N_x N_y$, $N'_x N'_y$, количества положительные или отрицательные в зависимости от того, действуют ли составляющие, которые они представляют, в направлении осей A_x, A_y или в противоположном направлении.

Приняв это, сделаем два замечания:

Во-первых, тело MB находится в равновесии под действием силы F' и давлений в M и B: следовательно, моменты относительно горизонтальной оси, спроецированной в M, дают (см. фигуру для обозначения букв)

$$[\,1\,] \qquad F'_B z + N'_x b' - N'_y a' = 0$$

в котором N'_x и N'_y должны быть взяты со своими знаками.

Во-вторых, совокупность двух тел находится в равновесии под действием сил F, F', N, N'..

Следовательно, моменты относительно горизонтальной оси A дают

$$[\,2\,] \qquad F\,x + F'\,x' + N'_x\,b - N'_y\,c = 0$$

и условие равенства нулю равнодействующей переносного движения выражается, кроме того, двумя уравнениями:

$$[\,3\,] \text{ и } [\,4\,] \qquad N_x + N'_x = 0\,,\ N_y + N'_y - (F + F') = 0$$

Четырех приведенных выше уравнений достаточно для определения четырех величин N_x, N_y, N'_x, N'_y и, следовательно, давлений N и N', их направления и смысла.

В точке M каждое из тел оказывает на другое давление. Пусть N'' — давление, которое тело AM оказывает на тело MB. Будем иметь

$$[\,5\,] \text{ и } [\,6\,] \qquad N''_x + N'_x = 0\,,\ N''_y + N'_y - F' = 0\,.$$

Можно было бы, вместо уравнения [2], получить другое, заметив, что согласно уравнению [1] силы F' и N' имеют равнодействующую, проходящую через M; следовательно, можно без изменения условий равновесия перенести их в эту точку параллельно самим себе. Тогда уравнение моментов относительно оси, проходящей через A, становится

$$F_x + F'_a + N'_x\,b - N'_y\,a = 0\ .$$

Но это уравнение неявно содержится в уравнениях [1] и [2], которые дают его вычитанием.

Можно было бы также прийти к системе уравнений, эквивалентной [1], [2], [3], [4], рассматривая равновесие тела MB вокруг M, затем равновесие тела MA вокруг M и, наконец, равенство нулю равнодействующей переносного движения, выраженное уравнениями [3] и [4].

Замечание. После того как с помощью шести уравнений первой степени пункта 64 найдены шесть величин N_x, N_y, N'_x, N'_y, N''_x, N''_y, как функции сил F, F', и различных координат, если изменить знаки сил F, F', что равносильно предположению, что они действуют в положительном направлении оси A_y, для проекций давлений найдутся те же абсолютные значения, но противоположные знаки. Это имело бы место, если бы весомая система, изображенная на фиг. 6, была заменена другой, симметрично расположенной ниже горизонтали A_x.

Так же будет рассмотрен случай фиг. 7, где точки сочленения A и B находятся на одной вертикали.

Равновесие AM вокруг M:

$$N_x b' + N_y b + P(b-a) - F(c-b) = 0$$

Равновесие системы вокруг B:

$$N_x b + Pa + P' a' + Fc = 0$$

Равновесие переносного движения:

$$N_x + N'_x = 0 \quad ; \quad N_y + N'_y + F + P + P' = 0$$

Вычисление давления N'', которое BM получает в M от верхнего тела:

$$N''_x + N'_x = 0 \quad ; \quad N''_y + N'_y + P' = 0$$

68. Если бы шарниры AB находились на вертикальном цилиндре, удерживаемом хомутом в C (фиг. 8) и подпятником в D, этот хомут без трения оказывал бы горизонтальное давление X, а подпятник — наклонное давление Q. Имели бы:

Моменты относительно D:

$$XK + Pa + Fc + P' a' = 0$$

Переносное движение:

$$Q_x + X = 0 \quad ; \qquad Q_y + (F + P + P') = 0 \quad ;$$

три уравнения для определения X, Q_x, и Q_y.

69. Система из четырех тел, симметричных по размерам и силам относительно вертикали $M'C$ (фиг. 9). Внешние силы, кроме шарниров A, B, предполагаются вертикальными.

Давление MM' на $M'M''$ и $M'M''$ на MM' в шарнире M' обязательно симметричны, но, кроме того, они равны и прямо противоположны; следовательно, они горизонтальны.

Поэтому достаточно изучить равновесие системы на фиг. 10, где N' — неизвестная горизонтальная сила, P и P' — вертикальные равнодействующие сил, действующих на тела AM, MM'.

Равновесие MM' дает уравнение моментов:

$$N' h' = P' \xi$$

Равновесие совокупности двух тел дает:

1° Моменты: $$N' h = P_x + P'_{x'}$$

2° Переносное движение: $Q_x = N'$; $Q_y = P + P'$

Из двух уравнений моментов получаем:

$$\frac{P_x + P'_{x'}}{h} = \frac{P' \xi}{h'}$$

уравнение условия, которое послужит для решения различных задач, относящихся к равновесию рассматриваемой системы.

Это уравнение осталось бы тем же, если бы силы P, P' изменили знак, т. е. направление, или если бы, при силах, всегда действующих сверху вниз, фигура была заменена другой, симметричной первой относительно A_x.

70. Если последнее уравнение не предполагается выполненным, спрашивается, какую горизонтальную силу X нужно приложить в M к одному или другому из двух тел, сочлененных в этой точке, чтобы получить равновесие.

Из тех же соображений имеем:

$$N' h' = P' \xi$$
$$N' h = P_x + P'_{x'} + X\, b$$

откуда

$$X = \left(\frac{P' \xi}{h'} - \frac{P_x + P'_{x'}}{h} \right) \frac{h}{b}$$

X — это натяжение нити, весом которой можно пренебречь, соединяющей точки M, M'' (фиг. 9).

71. Аналогичным образом поступают в более сложных случаях.

Пусть имеется произвольное число последовательных твердых тел, связанных шарнирами $M', M'', M''' \ldots M^n$. Два крайних тела, кроме того, вынуждены двигаться только вращаясь вокруг шарниров A, B, центры которых неподвижны. Точки $A, M', M'' \ldots M^{(n)}, B$ лежат в одной плоскости. На $n+1$ тело действуют известные внешние силы $F_1', F_2' \ldots F_1'', F_2'' \ldots F_1''', F_2'''$, лежащие в той же плоскости, но в остальном произвольные. Требуется проверить, существует ли равновесие, и в случае утвердительного ответа найти давления опор A, B и взаимные давления в M', M'', M'''.

Во-первых, действуя, как в пункте 64, проверим равновесие системы двух соседних тел AM', $M'M''$; и в случае утвердительного ответа определим давление N, оказываемое опорой A, давление N', которое тело AM' оказывает на своего соседа, и давление N'', которое $M'M''$ оказывает в M'' на $M''M'''$.

Во-вторых, тело $M''M'''$, находясь в равновесии под действием сил N'', $F1'''$, $F2'''$... и силы, которую оно получает в M''' от соседнего тела, проверим это условие либо путем последовательного сложения известных сил, равнодействующая которых должна проходить через M''', либо по свойству моментов, взятых относительно M'''; и если оно удовлетворено, равнодействующая переносного движения сил $F1'''$, $F2'''$, ... N'' будет именно давлением N''', которое рассматриваемое тело $M''M'''$ оказывает в N^{IV} на своего соседа $M'''M^{IV}$.

В-третьих, тело $M'''M^{IV}$ должно находиться в равновесии под действием известных сил F_1^{IV}, F_2^{IV}, ... и N''', и силы, которую оказывает в M^{IV} соседнее тело $M^{IV}M^{V}$; поступим так же для проверки этого равновесия и определения давления N^{IV}, оказываемого в M^{IV} на тело $M^{IV}M^{V}$.

И так далее до последней части шарнирной системы.

§: 3 О системах с полными связями.

72. Система твердых тел, связанных между собой, называется системой с полными связями, когда эти тела так соединены друг с другом и с другими неподвижными телами, что движение любой точки системы полностью определяет движение всех остальных, и каждая из этих точек может двигаться только по определенной прямой или кривой линии.

Примеры: различные весы, так называемые весы с коромыслом, весы Квинтенца, весы Роберваля; два балансира, соединенные параллелограммом; зубчатые колеса.

73. Когда в движении, которое может совершать такая система, трением можно пренебречь, т. е. работой взаимных действий тел между собой и реакций неподвижных тел, самым общим и обычно самым удобным принципом для нахождения условия равновесия является теорема о виртуальной работе.

Она состоит в том, что для равновесия необходимо и достаточно, чтобы внешние силы были таковы, что их полная работа была бы равна нулю, если бы предположить, что возможное движение системы совершилось.

Доказательство этой очень важной теоремы вытекает из того, которое было дано (45) для установления шести общих условий равновесия материальной системы.

1. Сформулированное выше условие необходимо: в самом деле, оно имеет место для каждого твердого тела системы, если присоединить к силам, свойственным ему, взаимные действия, которые оно получает от других соседних тел. Но, по предположению, полная сумма работ взаимных действий тел между собой равна нулю. Следовательно, если, записав для

каждого тела уравнение, выражающее рассматриваемое условие, мы сложим все уравнения, то найдем, что полная работа только внешних сил также равна нулю.

2. Это условие достаточно: ибо если оно выполнено, невозможно, чтобы система, предположительно находящаяся в покое, пришла в движение, так как это означало бы приобретение мощности живого действия без работы сил, что невозможно (39).

Применение теоремы о виртуальной работе к системам, указанным в пункте 72, сводится к вопросам геометрии.

74. Весы с коромыслом (фиг. 11). Платформа *AA*, на которую помещается взвешиваемое тело, шарнирно соединена в точке *B*, неизменно связанной с рычагом *ED*, неподвижная ось которого находится в *D*. Другой рычаг *HF*, неподвижная ось которого в *I*, соединен с платформой *AB* и нижним рычагом *ED* двумя шарнирными стержнями *GK*, *FE*. На конце *H* подвешена маленькая чашка. Веса различных частей устройства отрегулированы так, что когда платформа и чашка пусты, стержни *GK*, *FE* вертикальны, а также диаметральные плоскости ножей различных шарниров вертикальны. Это положение равновесия без груза является также положением равновесия, которое имеет место, когда платформа и чашки нагружены грузами *Q* и *P*. Для этого шарниры расположены так, что (как будет видно) при виртуальном движении устройства все точки, такие как *K*, *A*, *B*, неизменно связанные с платформой, поднимаются или опускаются на равные величины, так что в то время как точка B описывает малую дугу окружности вокруг *D*, плоскость *AA* платформы остается горизонтальной. Благодаря этому условию виртуальная работа веса предмета, помещенного на платформу, та же, как если бы этот вес был приложен в *K*, и устройство работает как безмен *HIG*, и имеем $P : Q :: I_g : I_b$.

Остается только посмотреть, как удовлетворяется условие поступательного движения платформы. Проведем через *D* и *I* горизонтали, которые пересекают вертикали *Bb*, *Ef*, *GK* в точках b, *e, f, g*, и предположим эти горизонтали связанными с рычагами *DE*, *IF*. Легко видеть 1° что вертикальное перемещение проекции *B* равно вертикальной элементарной дуге, которую описывает точка *b*, и которую мы назовем ζ; 2° что вертикальные перемещения *e* и f равны между собой, будучи соответственно равны перемещениям проекций *E* и *F* на вертикаль; таким образом, вертикальное перемещение *f* равно $\zeta \frac{\overline{De}}{\overline{Db}}$; 3° что вертикальное перемещение проекции *K* равно перемещениям *G* и *g*, и что последнее, по сравнению с перемещением *f,* равно $\zeta . \frac{\overline{De}}{\overline{Db}} . \frac{\overline{Ig}}{\overline{If}}$. Приравнивая эту последнюю величину ζ, находим искомое соотношение

$$\frac{\overline{Db}}{\overline{De}} = \frac{\overline{Ig}}{\overline{If}} \ .$$

75. Подъемный мост. (фиг. 12) A — ось вращения настила, B — точка крепления цепи BC, G — центр тяжести настила, P — его вес. D — ось вращения верхней подвижной фермы, G' — центр тяжести всей этой фермы, Q — её вес, C — точка крепления цепи CB к концу стрелы. Устроено так, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом. Тогда AB, CD остаются в своем движении постоянно параллельными. Следовательно, работа веса P, приложенного в G, такая же, как работа равного веса P, приложенного в точке G_1 расположенной относительно DC так же, как G расположен относительно AB. Приняв это, чтобы равновесие сохранялось в любом положении, пренебрегая весом цепи BC и трением, необходимо и достаточно, чтобы прямая G_1G' проходила через D, или, другими словами, чтобы GA была параллельна DG' и выполнялось

$$Q : P :: GA : DG'.$$

§: 4 О системах с альтернирующими шарнирами.

76. Пусть $ABCD$ (фиг.13) — твердое тело, опирающееся на другое тело LM гранью, проекции которой суть AB и $a\ e\ b\ c\ d$, без возможности отделиться скольжением, но с возможностью вращения вокруг любой точки или ребра периметра этой грани. На тело AC действуют различные силы вне плоскости AB; для сохранения покоя необходимо, чтобы эти силы уравновешивались сопротивлениями, которые тело LM оказывает на тело AC, и которые все, исходя из точек грани AB, направлены к телу AC. Следовательно, если для любой точки (A, a) периметра грани касания представить себе ось (проецирующуюся в A), не пересекающую эту грань, необходимо, чтобы сумма моментов относительно этой оси сил, таких как F_1, F_2. . . . . , была неположительной для всех точек, за исключением случая, когда она равна нулю, что имеет место, когда силы F имеют равнодействующую, проходящую через A.

77. Частный случай: когда силы, действующие на тело $ABCD$, независимо от сопротивления LM, имеют равнодействующую, предыдущее условие сводится к тому, что эта равнодействующая должна быть направлена от тела к грани касания и пересекать её плоскость внутри или по крайней мере на периметре наименьшего выпуклого многоугольника, охватывающего точки касания.

78. Равновесие в случае неравенства моментов, указанного в пункте 76, обладает тем замечательным свойством, что силы F_1 , F_2 , F_3 , ... могут в известных пределах изменяться независимо друг от друга, не вызывая заметного движения тела AC, к которому они приложены; это происходит потому, что реакции сопротивляющегося тела LM изменяются так, чтобы удовлетворить условиям равновесия; тогда как в системах с простыми шарнирами малейшее изменение интенсивности или направления одной из внешних сил обычно вызывает движение. Равновесие, при котором силы, отличные от реакций опор, могут таким образом варьироваться в ту или иную сторону до определенного предела без возникновения движения, составляет собственно устойчивость.

79. Когда силы F имеют равнодействующую (77), реакции тела LM также имеют равнодействующую, которая равна и противоположна первой; но из этого не следует, что можно определить интенсивность и направление этих реакций для каждой заданной части поверхности касания. В рациональной механике, допускающей существование абсолютно твердых и иногда полированных тел, из этой гипотезы заключают, что для равновесия тела AC необходимо, чтобы равнодействующая R сил F была перпендикулярна плоскости AB точек касания; и если эти точки сведены к числу трех, легко определяется нормальная реакция каждой из этих точек, но если имеется более трех точек касания, задача, поставленная в гипотезе неизменяемости формы тела, является неопределенной, тогда как в реальном состоянии тел она определена в силу их сжимаемости и упругости.

80. Можно устранить указанную неопределенность с помощью гипотезы, точность которой достаточна для практики. Чтобы сформулировать её и объяснить её следствия, рассмотрим простой случай. Пусть AA' (фиг. 14) — многоугольная грань, которой подвижное тело опирается на другое; и предположим, что на первое действуют различные силы F, равнодействующая R которых перпендикулярна $A'A''$. Представим, что до приложения этих сил, когда тело находилось в естественном состоянии, в твердом теле была проведена плоскость $B'B''$, параллельная $A'A''$ и очень близкая к ней. Тогда предполагается, что молекулы, находившиеся в плоскости $B'B''$, приближаются к молекулам, занимающим плоскость $A'A''$, но так, что и те, и другие оказываются соответственно в двух плоскостях $b'b''$, $A'A''$; наконец, предполагается, что реакции, действующие в различных точках A', A, A'', отнесенные к единице поверхности, пропорциональны величинам $B'b'$, $B''b''$, на которые расстояния, сначала равные $A'B'$, AB, $A''B''$, уменьшились. Таким образом, полагая $B'b' = h'$, $B''b'' = h''$ и вообще $Bb = h$, если обозначить через ω элемент поверхности в A, а через p давление на единицу поверхности в этой точке, получим для полного давления на этот элемент

$$\omega\, p = K\ \ h\ \ \omega\,,$$

где K — постоянная. Но $h\ \omega$ — это объем цилиндра с основанием ω и высотой Bb. Следовательно, можно принять все подобные объемы как представляющие давления на различные элементы поверхности $A'A''$; отсюда следует, что равнодействующая всех этих давлений представляется полным объемом усеченной призмы $B'b'b''B''$ и проходит через её центр тяжести. А так как эта равнодействующая прямо противоположна R, то R проходит через тот же центр тяжести. Таким образом, чтобы узнать распределение различных реакций от A' до A'', зная R, задача сводится к нахождению такой плоскости $b'b''$, чтобы усеченная призма имела свой центр тяжести на продолжении R.

81. Если, например, грань касания представляет собой параллелограмм, у которого $A'A''$ является стороной, и сила R лежит в плоскости, пересекающей посередине стороны, проецирующиеся в $A'A''$, центр тяжести усеченной призмы $B'b''$ проецируется в G, центр

тяжести трапеции B'b'b"B". Приняв это, пусть $B'G = a$, $B'B'' = l$. По известной теории моментов имеем:

$$(h' + h'')\, a = \frac{1}{3}\, l\, (h' + 2\, h'') \quad \text{откуда} \quad \frac{h'}{h''} = \frac{2 - 3\,\dfrac{a}{l}}{3\,\dfrac{a}{l} - 1} \qquad [\,1\,]$$

Согласно предыдущему пункту, обозначая через Ω полную площадь грани $A'A''$, полное давление P будет представлено как $\Omega\left(\frac{h'+h''}{2}\right)$ в то время как давления, на единицу площади, вдоль ребер A', A'', давления, которые мы будем обозначать как p', p'', будут представлены как h' и h''. Итак, имеем:

$$p' : P :: h' : \Omega\left(\frac{h' + h''}{2}\right) \qquad \text{или} \qquad p' = \frac{2}{1 + \dfrac{h'}{h''}} \cdot \frac{P}{\Omega} \qquad [\,2\,]$$

так же

$$p'' = \frac{2}{1 + \dfrac{h'}{h''}} \cdot \frac{P}{\Omega} \qquad [\,3\,]$$

Уравнения [1], [2], [3] дают крайние давления p', p'', из них можно легко заключить при необходимости давление в любой точке A.

82. Природа вопроса требует, чтобы величины h' и h'' были обе положительны, если только одна из них не равна нулю, что согласно [1] требует одновременного выполнения

$$2 \geq 3\,\frac{a}{l} \quad \text{и} \quad 3\,\frac{a}{l} \geq 1 \quad \text{или} \quad \frac{a}{l} \leq \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad \frac{a}{l} \geq \frac{1}{3}\ .$$

В частном случае, когда $a = \frac{1}{3}\, l$, находим

$$h'' = 0\ , \quad p'' = 0 \quad \text{и} \quad p = 2\,\frac{P}{\Omega}\ .$$

Таким образом, на ребре A', самом удаленном от R, давление было бы нулевым, в то время как вдоль ребра A, самого близкого, давление, отнесенное к единице поверхности, было бы вдвое больше среднего давления на единицу поверхности в пределах $A'A''$. Теперь если $a < \frac{1}{3}\, l$, естественно допустить, что полное давление распределяется по длине $3a$ вместо l. Пусть b — размер грани касания в направлении, перпендикулярном $A'A''$; тогда в пропорции [2] нужно подставить для Ω произведение $3ab$, одновременно положив $h'' = 0$, откуда получается максимальное давление на единицу поверхности

$$p' = \frac{2}{3}\,\frac{P}{ab}\ .$$

83. Следующий вопрос может дать повод для применения этой теории.

Два твердых тела AM', $M'B$ опираются на две неизменные плоскости AA', BB' и взаимно распираются по грани MM'. Зная равнодействующие F, F' сил, действующих на эти тела независимо от взаимных давлений в MM' и реакций опор AA', BB', спрашивается, каковы эти давления в простом случае, когда силы F, F' лежат в плоскости, перпендикулярной граням касания AA', BB', MM', и проходят через центры фигур этих граней.

Если допустить, что равнодействующие N, N'' реакций опор AA', BB' и равнодействующая N' взаимных давлений на MM' проходят в точках C, D, E, взятых произвольно на гранях, то вопрос оказывается аналогичным вопросу пункта 64 и решается без труда. Можно, кроме того, определить давления на единицу поверхности вблизи ребер A, A', M, M', B, B'. Но если задано условие, что эти давления не должны превышать определенного предела, выбор точек C, D, E, хотя и остается неопределенным, оказывается гораздо более ограниченным, потому что эти точки не должны приближаться к ребрам меньше, чем на расстояние, которое определится методом проб.

84. Те же соображения встречаются во всех вопросах, относящихся к устойчивости систем с альтернирующими шарнирами. Нижеследующий пример допускает многочисленные применения.

Пусть система $E\ I\ i\ I_1\ E_1\ e\ E$ (фиг. 15) из тел, симметричных по размерам и силам относительно вертикали $e\ i\ V$.

Эти тела соединены между собой и с нижними неподвижными телами, на которые система опирается, таким образом, что крайние тела могут попеременно вращаться вокруг ребер I, E, I_1, E_1; что тела $e\ A'$, $e\ A'_1$ могут частично отделяться, вращаясь вокруг одного или другого из ребер $i\ e$; что тела $e\ A'$, $B'A''$ подобным же образом связаны альтернирующим шарниром в A' и B'; и так далее. Мы ограничимся случаем, когда равнодействующие F', F'', ... известных внешних сил лежат в вертикальной плоскости, спереди и сзади которой фигура системы симметрична, и предлагаем 1° найти условия устойчивости системы, 2° определить давления тел друг на друга и на две опоры.

Во-первых, как и в пункте 69, увидим, что равнодействующие взаимных давлений, действующих в i е, горизонтальны, и можно считать, что тела, заключенные между IE и ie, причем эта последняя плоскость, подвержена в неизвестной точке C действию неизвестной силы N.

Таким образом, тело $A'e$ находится в равновесии под действием сил N и F' и реакций, которые оно получает от тела $A'B''$, равнодействующие которых проходят в точке C' между A' и B. Вообще, совокупность iA_nB_ne любого числа частей системы, заключенных между точками ie, A_nB_n, находится в равновесии под действием внешних сил, которые суть: 1° горизонтальная сила N, проходящая через c между i и e; 2° известные силы F', F''....., $F^{(n)}$. 3° равнодействующая (проходящая через $C^{(n)}$ между $A^{(n)}$ и

$B^{(n)}$) реакций или давлений, которые тело, лежащее ниже плоскости $A^{(n)}B^{(n)}$, оказывает на тело, лежащее выше этой плоскости.

Отсюда следует, что если рассмотреть моменты этих сил относительно прямой, спроецированной в $A^{(n)}$, момент силы N равен сумме моментов сил F', F'', ..., $F^{(n)}$ относительно той же оси. Запишем это так:

$$N\,\zeta^{(n)} > \sum M\{F', F'' \ldots . F^{(n)}\}_{A^{(n)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [1]$$

называя $\zeta^{(n)}$ вертикальную ординату точки $A^{(n)}$ ниже горизонтальной плоскости, проходящей через c.

Точно так же вся система, заключенная между EI и ei, находится в равновесии под действием силы N, всех сил F и равнодействующей, проходящей через C, давлений, оказываемых снизу вверх опорой на тело, лежащее выше плоскости EI; отсюда легко заключим, что если взять моменты относительно внешнего ребра E, получим

$$\sum M\{F\}_E > N_\eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [2]$$

называя η вертикальную ординату E ниже горизонтальной плоскости, проходящей через c.

Оба неравенства [1] и [2] можно рассматривать как выражающие, что если бы система состояла из 2 твердых тел $E\,I\,A^{(n)}\,B^{(n)}$, $B^{(n)}\,A^{(n)}\,i\,e$, движение, которое состояло бы в оседании шва $i\,e$ и вращении нижнего тела вокруг E, не могло бы иметь места.

Перемножая два подобных неравенства [1] и [2], получим:

$$\zeta^{(n)} \sum M\{F\}_E > \eta \sum M\{F', F'' \ldots . F^{(n)}\}_{A^{(n)}} \quad \ldots\ldots\ldots [3]$$

Теперь, чтобы исключить из этого неравенства высоты $\zeta^{(n)}$, η, которые остаются всегда неопределенными, заметим, что если назвать $z^{(n)}$ и h ординаты точек $A^{(n)}$ и E ниже горизонтальной плоскости, проходящей через e, имеем

$$\frac{z^{(n)}}{h} > \frac{\zeta^{(n)}}{\eta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [4]$$

поскольку оба члена первой дроби превышают члены второй на одну и ту же величину $c\,e$. Перемножая два подобных неравенства [3] и [4], находим

$$\frac{\sum M\{F\}_E}{h} > \frac{\sum M\{F', F'', \ldots F^{(n)}\}_{A^{(n)}}}{z^{(n)}} \quad \ldots\ldots\ldots [5]$$

Левая часть этого неравенства имеет единственное значение; правая часть, напротив, принимает различные значения в зависимости от того, к какой из точек A', A'' . . . внутренней поверхности системы её применить. Неравенство [5] можно резюмировать, сказав, что сила, выраженная частным

$$\frac{\sum F\{F\}_E}{h}$$

должна быть больше наибольшего из значений, принимаемых частным

$$\frac{\sum F\{F', F'' \dots F^{(n)}\}_{A^{(n)}}}{z^{(n)}}$$

при изменении индекса n.

Мы только что рассмотрели движения $A^{(n)}$ и E — одно на внутренней, другое на внешней поверхности; и два неравенства [1] и [2] позволили нам исключить N. Мы получим аналогичный результат, рассматривая оси моментов $B^{(n)}$ и I, первую на внешней, вторую на внутренней поверхности. Из рассуждений, подобных предыдущим, видно, что

$$N\,\psi^{(n)} < \sum M\left\{F', F'' \dots F^{(n)}\right\}_{B^{(n)}} \quad \dots\dots\dots [\,1^{\text{bis}}\,]$$

называя $\psi^{(n)}$ ординату $B^{(n)}$ ниже горизонтали, проходящей через c;

$$\sum M\{F\}_I < N\ \chi \quad \dots\dots\dots\dots\dots [\,2^{\text{bis}}\,]$$

называя χ ординату I ниже той же горизонтали;

$$\frac{y^{(n)}}{k} < \frac{\psi^{(n)}}{\chi} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots [\,4^{\text{bis}}\,]$$

называя $y^{(n)}$ и k ординаты $B^{(n}$ и I ниже горизонтали, проходящей через i.

Перемножая между собой эти три неравенства, находим

$$\frac{\sum M\{F\}_I}{k} < \frac{\sum M\left\{F', F'' \dots F^{(n)}\right\}_{B^{(n)}}}{y^n} \quad \dots\dots [\,5^{\text{bis}}\,]$$

то есть сила, выраженная левой частью этого неравенства, должна быть меньше наименьшего из значений, которые принимает правая часть при изменении индекса n.

Неравенства [5] и [5^{bis}] являются искомыми условиями устойчивости, если предположить тела системы достаточно прочными, чтобы усилия, которым они подвергаются, не вызывали разрушения. Если бы одно из этих неравенств стало равенством, это означало бы, что система находится в неустойчивом равновесии и что точка i e, будучи на грани раскрытия, сила N действует либо в e (если [5] становится равенством), либо в i (если это [5^{bis}]). Это можно было бы найти непосредственно, повторив предыдущие рассуждения в этом предположении.

85. Поиск равнодействующих давлений, воспринимаемых точками, представляет собой задачу, которая в случае устойчивости системы и в предположении неограниченной прочности материалов имеет бесконечное множество решений. Она стала бы определенной, если бы были известны две точки многоугольника $CC'C''C^{(n)}C$ центров давления, например C и $C^{(n)}$. Действительно, из этого можно было бы заключить значение N из уравнения моментов (см. фигуру):

$$N\,.\,\overline{cD}^{(n)} = \sum M\left\{F', F'' \dots F^{(n)}\right\}_{C^{(n)}} \quad \dots\dots\dots [\,6\,]$$

Если бы двумя известными точками были $C^{(n)}$ и C, то, помимо предыдущего уравнения, имели бы

$$N \,.\, \overline{cD} \;=\; \sum M \,\{F\}_C$$

откуда вычитанием,

$$N \,.\, \overline{DD^{(n)}} \;=\; \sum M \,\{F\}_C \;-\; \sum \left\{F\,',\, F\,'',\, \ldots\, F^{(n)}\right\}_{C^{(n)}} .$$

Сила N, будучи таким образом определена, точка C' находится графически или расчетом на равнодействующей известных сил N и F', точка C'' — на равнодействующей известных сил N, F', F'' и так далее до точки C.

86. На этом наблюдении основан следующий подход, идея которого принадлежит г-ну Méry (*Анналы Мостов и Дорог*, янв. 1840), для проверки устойчивости цилиндрического свода с учетом ограниченной прочности материалов. Выбирают точку $A^{\{(n)\}}$ таким образом, чтобы она примерно давала наибольшее значение частного

$$\frac{\sum M \left\{F\,',\, F\,''\, \ldots\, F^{(n)}\right\}_{A^{(n)}}}{x^{(n)}} \;,$$

образующего правую часть неравенства [5]. Это частное, которое вычисляют приближенно, дает значение, меньшее N (что видно, умножая неравенство [1] на подобное неравенство $Z^{(n)} > \zeta^{(n)}$), но обычно мало от него отличающееся. Подставляя его в окончательную формулу пункта 82 вместо P и подставляя также для p' максимальное давление на квадратный метр, которому можно подвергнуть рассматриваемые материалы, находим значение

$$a \;=\; \frac{2}{3}\,\frac{N}{bp'}$$

наименьшей величины, которую можно придать расстоянию e c.

87. С другой стороны, перенося параллельно самим себе в одну и ту же точку приложения силы $N, F', F''. \ldots . F^{(n)}$ и вычисляя их равнодействующую, получим таким же образом приближение полного давления на шов $A^{(n)}\ B^{(n)}$; откуда заключим наименьшую величину, которую может иметь расстояние $A'^{n)}\ C^{(n)}$.

88. Принимая затем точки C и $C^{(n)}$ таким образом, чтобы удовлетворить этим двум условиям, вычислим с большей точностью силу N по формуле [6] из № 85, и если она заметно отличается от первой вычисленной, соответственно изменим точки C и $C^{\{(n)\}}$. Сделав это, определим (85) другие точки многоугольника центров давления, в частности точку C, которая, учитывая полное давление на шов $I\ E$, вычисленное таким же образом, как и для шва $A\ B^{(n)}$, (87), должна отстоять от ребер F_1 , I, по крайней мере на расстояние, которое также можно вычислить.

Если это условие выполнено, необходимо убедиться, что оно выполнено также для всех остальных швов.

Глава 3. *О сопротивлении материалов, применяемых в строительстве.*

§:1 Призмы, растягиваемые или сжимаемые параллельно своей длине.

89. Призма, нагруженная на концах силами, параллельными её длине и равномерно распределенными по каждому основанию, удлиняется или укорачивается на величину, которая, когда равновесие восстановлено, подчиняется весьма простому закону, пока интенсивности сил не слишком велики. Если обозначить

L — первоначальная длина призмы,

x — её удлинение,

i — отношение $\frac{x}{L}$, т. е. удлинение или укорочение на единицу длины,

F — полная сила, действующая на одно из оснований призмы,

Ω — площадь этого основания или площадь поперечного сечения призмы,

R — отношение $\frac{F}{\Omega}$, т. е. сила (натяжение или давление), действующая на единицу площади поперечного сечения призмы;

то две величины R и i прямо пропорциональны, и, следовательно,

$$R = Ei \quad \text{или} \quad F = E\frac{\Omega}{L}x \qquad [1]$$

где E — постоянная, пока природа тела не меняется и сила R не превышает определенного значения, называемого *пределом упругости*.

Например, для кованого железа, принимая метр и килограмм за единицы, имеем приблизительно

$$E = 2\times 10^{10},$$

откуда можно заключить, что если натяжение составляет 10 килограммов на квадратный миллиметр, или $R = 10\times 10^{6}$, то удлинение на метр i равно $\frac{1}{2\,000}$ или $\frac{1}{2}$ миллиметра. Для этого железа предел упругости соответствует натяжению, которое колеблется от 12 до 15 килограммов на квадратный миллиметр в зависимости от качества железа; таким образом, наибольшее значение R, совместимое с указанным выше законом, составляет от 12×10^6 до 15×10^6, а соответствующее значение i — от 0,0006 до 0,00075.

90. Эти результаты опыта можно проверить, подвешивая к нижнему концу вертикальной призматической закрепленной другим концом тяги тело известного веса. Чтобы показать, как важно не давать этому телу приобретать заметную скорость, когда речь идет об измерении предела упругости, мы рассмотрим следующую задачу, заимствованную из «*Введения в промышленную механику*» г-на Понселе, стр. 385 и след.

Вертикальная призматическая тяга закреплена своим верхним концом. Тело M, вес которого Q, будучи нанизанным на эту тягу, скользит без трения параллельно её длине и, таким образом, приобрело скорость V_0 в момент, когда, будучи остановлено упором на нижнем конце тяги, оно не может больше опускаться, не получая со стороны тяги силы, противоположной силе тяжести. Исходя из этого, с этого момента задается вопрос о законе движения тела M, рассматриваемого как сжатое в центре тяжести, пренебрегая массой стержня и, следовательно, допуская, что по мере его удлинения его натяжение равномерно увеличивается по всей его длине и следует тому же закону, как если бы под этим напряжением она находилась в состоянии покоя.

Обозначим в любой момент, сохраняя предыдущие обозначения,

x — путь, пройденный телом M и нижним концом тяги с момента их соединения,

v — скорость, приобретенная телом M.

Переменная сила F, которую тяга оказывает на это тело, выражается как

$$E\,\frac{\Omega}{L}\,x$$

согласно предыдущему пункту и только что высказанной гипотезе. Таким образом, работа сил Q и F, приложенных к телу M за время прохождения x, равна

$$\int_0^x (Q - F)\,dx \qquad \text{или} \qquad \int_0^x \left(Q dx - \frac{E\,\Omega}{L}\,x dx \right) .$$

Мощность живого действия, приобретенная телом M благодаря этой работе, составляет

$$\frac{1}{2}\,\frac{Q}{g}\left(v^2 - v_0^2\right)$$

Следовательно, имеем (89)

$$\frac{1}{2}\,\frac{Q}{g}\left(v^2 - v_0^2\right) = Q\,x - \frac{E\,\Omega}{2\,L}\,x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [\,2\,]$$

Для упрощения обозначим через l удлинение тяги в момент, когда её натяжение равно Q; это то удлинение, которое она получила бы и сохранила, если бы тело M было подвешено на ней в покое. Чтобы определить его, нужно в уравнении [1] положить $F = Q$, и $x = l$ откуда $\frac{E\,\Omega}{L} = \frac{Q}{l}$.

Подставляя в уравнение [2], имеем

$$v^2 - v_0^2 = \frac{g}{l}\,(2\,l - x)\,x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,3\,]$$

Максимум скорости соответствует $x = l$ и $F = Q$, что можно было бы увидеть *a priori*; максимум дается формулой

$$V^2 = V_0^2 + gl \ .$$

Пока V положительно, тяга удлиняется: максимальное удлинение X соответствует $v = 0$ и дается уравнением

$$X^2 - 2lX = \frac{l v_0^2}{g} \quad \text{или} \quad X = l + \sqrt{l^2 + \frac{l v_0^2}{g}}$$

Соответствующее натяжение, согласно [1], относится к Q как X к l; оно равно

$$\frac{Q X}{l} \quad \text{или} \quad Q\left(1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{gl}}\right).$$

Так, например, в частном случае, когда $v_0 = 0$, т. е. когда груз Q, сначала прикрепленный к ненапряженной тяге, внезапно отпущен без вертикальной скорости под действием силы тяжести, тяга в момент остановки тела получает удвоенное удлинение и удвоенное натяжение по сравнению со значениями, которые соответствовали бы состоянию покоя. Когда v_0 не равно нулю, максимум натяжения зависит от отношения высоты $\frac{v_0^2}{2g}$ к $\frac{1}{2}l$, и эта последняя величина, при прочих равных условиях, пропорциональна L.

91. Начиная с момента максимального удлинения, тело M поднимается, проходя те же значения x и имея те же скорости, но в обратном направлении. Следовательно, оно обладает восходящей скоростью, равной v_0 в момент, когда тяга вернулась в своё естественное состояние. В этом положении, если тело может скользить вдоль тяги без трения, оно поднимется на высоту $\frac{v_0^2}{2g}$, обусловленную v_0, а затем упадет. Если, напротив, оно закреплено на конце тяги и та не может изгибаться, она будет сжиматься, оказывая на тело M давление сверху вниз, интенсивность которого дается формулой

$$F = \frac{E \Omega x'}{L},$$

где x' — уменьшение длины тяги. Действие тяги, следовательно, во всех возможных положениях дается по интенсивности и направлению формулой

$$F = \frac{E \Omega x}{L}$$

ранее введенной в расчет, с изменением знака x, когда тело M находится выше начального положения. В этом случае формула [3] применима ко всем значениям x, положительным или отрицательным; она дает, полагая $v = 0$, крайние значения x, а именно:

$$l \pm \sqrt{l^2 + \frac{l v_0^2}{g}},$$

откуда следует, что амплитуда колебаний равна

$$x\sqrt{l^2 + \frac{l v_0^2}{g}}.$$

Пусть A (фиг. 16) — начало x;

$$AO = L \;\; ; \;\; OB = OB' = \sqrt{l^2 + \frac{l\, v_0^2}{g}} = p \;\; .$$

Пусть AM — некоторое значение x, обозначим через z переменную OM и преобразуем уравнение [3], заменив x его выражением через z. Найдем

$$x = l + z \;\; ; \;\; 2\,l - x = l - z$$

откуда $v^2 - v_0^2 = \frac{g}{l}\left(l^2 - z^2\right)$ или $v^2 = \frac{g}{l}\left(p^2 - z^2\right)$.

Скорость v представляется, следовательно, ординатой MN или y окружности, построенной на BB' как на диаметре, умноженной на коэффициент $\sqrt{\frac{g}{l}}$.

Если искать продолжительность колебаний, нужно в последнем уравнении положить $v = \frac{dz}{dt}$ и получить

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{dz}{\sqrt{p^m - z^2}} \;\; ,$$

откуда интегрированием

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\; arc\left(\sin = \frac{z}{p}\right) + c \;\; ,$$

и, беря этот интеграл от $z = -p$ до $z = p$, находим продолжительность одного простого колебания (туда или обратно):

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \;\; ,$$

величину, не зависящую от начальной скорости v_0.

Г-н Понселе выполняет это интегрирование элементарным геометрическим способом. Пусть MM' — бесконечно малый путь dz, пройденный за время dt; обозначая ординату MN через y, имеем

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{dz}{y} \;\; .$$

Проводя $M'N'$ параллельно MN и $N'P$ параллельно MM' и обозначая через ds бесконечно малую дугу NN', из подобия треугольников OMN, $NN'P$ имеем

$$\frac{dz}{y} = \frac{ds}{p} \;\; , \text{ и, следовательно, } \;\; dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{ds}{p} \;\; .$$

Поэтому время, затраченное на прохождение MM', выражается через ds или NN', умноженное на $\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{.1}{p}$.

Следовательно, время прохождения BB' равно

$$\pi\, p \times \sqrt{\frac{l}{g}} \,.\, \frac{1}{p} \quad \text{или} \quad \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \,.$$

Пример. $L = 10\ m\ ,\ \dfrac{Q}{\Omega} = (4 \times 10^6)\ k\ .\ ,\ E = (2 \times 10^{10})\ k\ .\ ,\ v_0 = 0\ .$

Находим $l = \dfrac{QL}{E\ \Omega} = 0{,}002\ m\ ;$

максимальная скорость $V = \sqrt{gl} = 0{,}142\ m\ ;$

продолжительность одного простого колебания

$$T = 3{,}1416\ \sqrt{0{,}00204} = 0{,}045\ s\ ;$$

число двойных ходов в секунду $\dfrac{1}{2\ T} = 11{,}1\ .$

92. Предыдущие соображения позволяют понять, что нагрузка, недостаточная для превышения предела упругости детали, может произвести этот эффект, если случайная причина сообщит ей скорость, и объясняют то, что неправильно называют влиянием или действием времени. Так, тяга, которая теряет свою упругость только под нагрузкой от 12 до 15 килограммов на квадратный миллиметр ($R = 12 \times 10^6$ до 15×10^6), рассматривается как способная нести лишь постоянную нагрузку от 6 до 8 килограммов на квадратный миллиметр ($R = 6\ от\ 8 \times 10^6$).

§:2 Общие сведения об изгибе призм

93. Когда на призму действуют силы, наклоненные по отношению к её длине, она изгибается, и допускается, что материальные элементы, первоначально находившиеся в сечении, перпендикулярном ребрам, остаются и после их смещения в плоскости, нормальной к кривым, которые заменяют эти прямолинейные ребра.

Пусть *AB* (фиг. 16) — призма, изогнутая внешними силами и находящаяся в покое. Пусть *aa′, bb′* — два бесконечно близких поперечных сечения, которые в естественном состоянии были бы параллельны, а в состоянии изгиба составляют бесконечно малый угол. Мы предполагаем, что часть тела *bb′B* подвержена действию внешних сил *F*, равнодействующая которых приблизительно параллельна плоскости *aa′*, лежит в плоскости чертежа и, разделяя призму на две симметричные части, является плоскостью изгиба.

Эта часть *bb′B* призмы подвержена, помимо сил *F*, молекулярным действиям, которые элементы сечения *aa′* оказывают на элементы сечения *bb′*. Мы будем в общем обозначать эти последние силы через *A*. Эта совокупность двух видов сил удовлетворяет шести общим условиям равновесия. Три из этих условий приводят к важным следствиям.

94. 1° — Взяв ось *x*, перпендикулярную *aa′*, имеем

$$\sum F_x + \sum A_x = 0 \quad \text{или, согласно гипотезе,} \quad \sum A_x = 0\ .$$

Следовательно, силы Ax — одни положительные, или отталкивающие, другие отрицательные, или притягивающие; значит, имеет место укорочение в элементарном волокне $a'b'$, удлинение в ab и некоторое промежуточное волокно oo' неизменной длины.

95. 2° — Ось моментов можно выбрать произвольно. Пусть выбрана та, которая проецируется в o. Имеем

$$\sum M\{F\}_o = \sum M\{A\}_o ,$$

принимая за положительные моменты притягивающих сил выше o и моменты отталкивающих сил ниже той же оси. Эта величина $\sum M\{A\}_o$ называется <u>моментом упругости</u> призмы в сечении aa' для состояния изгиба, вызванного силами F. Из уравнения моментов следует, что когда расстояния сил F до оси o очень велики по сравнению с поперечными размерами призмы (единственный случай, изучаемый здесь), абсолютная сумма сил Ax очень велика по сравнению с интенсивностями сил F.

96. 3° — Взяв ось y, параллельную aa', имеем

$$\sum A_y + \sum F_y = 0 .$$

Так как эта сумма $[\sum F_y]$ является равнодействующей сил F, отсюда следует, что сумма сил A_y, составляющих, параллельных плоскости aa', молекулярных действий aa' на bb', очень мала по сравнению с абсолютной суммой сил Ax. По этой причине можно считать, что плоскость bb' отклонилась от своего первоначального положения относительно плоскости aa', повернувшись вокруг o' без скольжения; так что эта точка o' остается расположенной так же, как и относительно плоскости aa'. Отсюда также следует, что силы A можно считать нормальными к aa'.

97. Пусть $d\omega$ — элемент поверхности aa', v — его расстояние от оси o, положительное или отрицательное в зависимости от того, находится ли $d\omega$ ниже или выше o. Нормальная сила A, которую он оказывает на сечение bb', будучи пропорциональна укорочению или удлинению волокна, имеющего этот элемент основанием, а это изменение длины само пропорционально v, имеем

$$A = \varphi\, v\, d\,\omega$$

называя $\varphi\, d\,\omega$ сила A на единице расстояния, где $\sum A$, распространенная на все сечение aa', равна нулю (94). Следовательно,

$$\sum \varphi\, v\, d\,\omega = 0 \qquad \text{или} \qquad \sum v\, d\,\omega = 0$$

таким образом, ось o проходит через центр тяжести сечения, спроецированного в aa'.

98. Момент упругости $\sum M\{A\}_o$, который изменяется в зависимости от природы детали и от её состояния изгиба в месте рассматриваемого сечения aa', может быть выражен различными способами.

1-е выражение. Для элемента $d\omega$ сила A равна $\varphi\, v\, d\,\omega$, её момент равен $\varphi\, v^2\, d\,\omega$, находится ли этот элемент выше или ниже оси o. Следовательно, для всего сечения имеем

$$\sum M\{A\}_o = \varphi \sum v^2\, d\omega \ .$$

Сумма $\sum v^2\, d\omega$ называется неправильно <u>моментом инерции</u> поверхности aa' относительно оси, проецируемой в o. Известно, что эта ось, проходящая через центр тяжести, сумма $\sum v^2\, d\omega$ меньше, чем если бы она была взята относительно любой другой оси, параллельной первой(*). Мы будем для краткости обозначать эту сумму через I; таким образом,

$$\sum v^2\, d\omega = I \ .$$

99. *2-е выражение*. Пусть R частное $\frac{A}{d\omega}$, т. е. <u>сопротивление (натяжение или давление</u>), отнесенное к единице поверхности, которое элемент $d\omega$, расположенный в сечении aa' на расстоянии v от оси, проецируемой в o, оказывает на соответствующий элемент сечения bb', чтобы воспрепятствовать либо их сближению, либо их удалению. Имеем, следовательно,

$$R = \varphi\, v \qquad \text{или} \qquad \varphi = \frac{R}{v} \ ,$$

отсюда момент эластичности

$$\sum M\{A\}_o = \frac{R}{v} \qquad \sum v^2\, d\omega = \frac{R}{v} I \ ,$$

замечая, что под знаком $\sum$, v имеет общее значение, в то время как в $\frac{R}{v}$ это конкретное расстояние, и отношение $\frac{R}{v}$ постоянно для данного состояния изгиба в месте сечения aa'. R и v пропорциональны, так что если R' — наибольшее сопротивление на единицу поверхности в сечении aa', а v' — наибольшая ордината точек этого сечения относительно оси, проецируемой в o, имеем

$$\sum M\{A\}_o = \frac{R'}{v'} \sum v^2\, d\omega$$

или, для краткости, $$M = \frac{R'}{v'} I \ .$$

Наконец, если обозначить через R_1 максимальное сопротивление на единицу поверхности, которое может оказывать деталь, не превышая предела упругости, получим относительно различных состояний изгиба детали вблизи сечения aa'

$$\underline{\textit{предел момента упругости}} = \frac{R_1}{v'} \sum v^2\, d\omega$$

или, для краткости, $$M = \frac{R_1}{v'} I \ .$$

(*) Это общее свойство моментов инерции очень легко установить, особенно в случае плоских поверхностей. Пусть $d\omega$ элемент поверхности, v – его расстояние до оси, проходящей через центр тяжести, y – его расстояние до другой параллельной оси, k-расстояние этих двух осей друг от друга.
Имеем $y^2 = (v \pm k)^2$ и $\sum y^2\, d\omega = \sum v^2\, d\omega + k^2\, d\omega$ из-за уравнения $\sum v\, d\omega = 0$.

При этом необходимо различать, является ли в точке с ординатой v' взаимное действие сечений aa', bb' давлением или натяжением, так как значение R_1 не всегда одинаково для обоих случаев. Например, для чугуна, когда речь идет о постоянных усилиях, значения R_1, которые следует принимать, составляют 3×10^6 (или 3 килограмма на квадратный миллиметр) для натяжения и 10×10^6 (10 килограммов на квадратный миллиметр) для давления.

100. *3-е выражение момента упругости*. Пусть c — точка пересечения aa' и bb' или центр кривизны детали в aa'. Элемент nn', сечение которого $d\omega$ и расстояние до oo' равно v, укорачивается на $oo' - nn'$, и отталкивающая сила, которую он оказывает в n', равна (89)

$$A = E \frac{oo' - nn'}{oo'} d\omega \ .$$

а $oo' : nn' :: oc : oc - v$ откуда $\dfrac{oo' - nn'}{oo'} = \dfrac{v}{oc} = \dfrac{v}{\rho}$;

следовательно $A = E \dfrac{v \, d\omega}{\varsigma}$

следовательно, полный момент отталкивающих сил ниже оси o относительно той же оси равен $\underline{E} \sum v^2 \, d\omega$, причем эта последняя сумма берется для области сечения ниже o.

Точно так же для элемента mm' притягивающая сила, которую он оказывает в m', равна

$$E \frac{mm' - oo'}{oo'} d\omega$$

а $mm' : oo' :: oc + v : oc$ откуда $\dfrac{mm' - oo'}{oo'} = \dfrac{v}{\rho}$;

давая v его абсолютное значение. Следовательно, притягивающая сила равна $\underline{E \, v \, d\omega}$, и её момент равен $E \, \underline{v^2 \, d\omega}$, как и для отталкивающих сил. Таким образом, для всех сил, которые сечение aa' оказывает на рассматриваемую часть детали, сумма их моментов относительно o, или момент упругости, равна

$$\sum M\{A\}_o = \frac{E}{\rho} \sum v^2 \, d\omega \qquad \text{или} \qquad \frac{E\,I}{\rho} \ ,$$

причем сумма $\sum v^2 \, d\omega$, называемая моментом инерции, берется по всей площади сечения aa'.

101. *4-е выражение момента упругости*. В приложениях, которые будут рассмотрены, радиусы кривизны деталей всегда предполагаются очень большими по сравнению с длинами этих деталей, потому что в строительстве важно, чтобы деформации были мало заметны. Если поэтому предположить ось x касательной в одной из точек центральной линии, проходящей через центры тяжести поперечных сечений детали, наклон кривой к этой оси будет везде очень мал. Принимая ось y в плоскости

кривой и перпендикулярно оси x и предполагая, что уравнение кривой есть $y = f(x)$, известно, что радиус кривизны в общем равен

$$\rho = \frac{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)} .$$

Но поскольку в приложениях наклон $f'(x)$ всегда мал, мы совершим лишь очень малую ошибку и получим большое упрощение, если напишем

$$\rho = \frac{1}{f''(x)} \text{ , откуда } \sum M\{A\}_o = E f''(x) \sum v^2 d\omega \text{ , или } E I f''(x) .$$

§:3 Формулы для моментов инерции различных плоских поверхностей и для соответствующих пределов моментов упругости.

102. Параллелограммы, одна сторона которых параллельна оси момента инерции (фиг. 17)

$$I = \int_{-\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c} v^2 b\, dv = \frac{1}{2} b\, v^3 + c = \frac{1}{12} b\, c^3 = \Omega \frac{c^2}{12} ,$$

обозначая через Ω площадь параллелограмма.

Предел момента упругости получается, принимая $v' = \frac{1}{2} c$ в последней формуле пункта 99:

$$M_1 = R_1 . \frac{bc^2}{6} = R_1 \Omega \frac{c}{6} .$$

103. Пустотелый прямоугольник (фиг. 18 и 19)

Момент инерции в этом случае есть разность двух других, вычисляемых по предыдущей формуле. Имеем

$$I = \frac{1}{12}\left(b\, c^3 - b'\, c'^3\right) \quad \text{и} \quad M_1 = \frac{RI}{\frac{1}{2} c} = R_1 \frac{b\, c^3 - b'\, c'^3}{6\, c} .$$

При применении этих формул и формул, которые будут получены в следующих пунктах, не следует упускать из виду, что они основаны на гипотезе (93), которая полностью допустима только для сплошных призм, сечение которых мало отличается от правильного многоугольника. В случае фиг. 18 и 19, где сечение имеет два горизонтальных прямоугольника, соединенных двумя вертикальными прямоугольниками, если последние становятся очень тонкими, первые будут изгибаться примерно так, как если бы они были независимы и каждый подвергался половине сил, приложенных к совокупности.

Чтобы избежать этого эффекта, заполняют входящие углы плавными кривыми сопряжения, называемыми галтелями.

104. Параллелограмм, диагональ которого является осью момента инерции (фиг. 20)

$$I = \int_{-h}^{h} v^2 \left(b - \frac{bv}{h} \right) dv = b \left(\frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4h} \right) + c = \frac{1}{6} b h^3 = \Omega \frac{h^2}{6}$$

$$M_1 = \frac{R_1 I}{h} = R_1 \frac{6 h^2}{6} = R_1 \Omega \frac{h}{6}$$

105. Треугольник, одна вершина которого лежит на оси момента инерции (фиг. 21)

Та же формула, что и в предыдущем пункте.

106. Треугольник, одна сторона которого параллельна оси момента инерции (фиг. 22)

Если бы ось момента инерции проходила через вершину, имели бы

$$\sum y^2 \, d\omega = \int_{o}^{h} y^2 . \frac{by \, dy}{h} = \frac{1}{4} b h^3 .$$

При оси, проходящей через центр тяжести, имеем, согласно известному свойству моментов инерции (примечание к п. 98):

$$I = \frac{1}{4} b h^3 - \frac{b h}{2} . \left(\frac{2}{3} h \right)^2 = \frac{1}{36} b h^3 = \Omega \frac{h^2}{18}$$

Что касается M_1 может потребоваться различение (99) в зависимости от того, происходит ли удлинение у основания b или у противоположной вершины. Пусть R_t — значение R для натяжения, а R_p — его значение для давления. Если удлинение происходит у основания, M_1 будет меньшим из двух значений:

$$\Omega R_t \frac{h}{6} \quad , \quad \Omega R_p \frac{h}{12}$$

в противном случае это будет меньшее из двух значений:

$$\Omega R_t \frac{h}{12} \quad , \quad \Omega R_p \frac{h}{6}$$

если, например, $R_p = 3$, что примерно соответствует выплавке железа (99), M будет $\Omega R_t . \frac{h}{6}$ в первом случае и $\Omega R_t . \frac{h}{12}$ во 2-м.

107. Прямоугольник со сторонами b и c, где сторона c составляет угол α с осью момента инерции (фиг. 23)

Рассмотрим сначала трапецию $BCDE$, половину прямоугольника. Пусть T, T' — площади треугольников BCF, EDF. Момент инерции трапеции равен (104)

$$\frac{1}{6} \left(T h^2 - T' h'^2 \right),$$

а $$T : T' :: h^2 : h'^2 \qquad \text{откуда} \qquad T b'^2 = T' b^2 ;$$

Следовательно,

$$\frac{1}{6} \left(T h^2 - T' h'^2 \right) = \frac{1}{6} \left(T h^2 - T' h^2 + T h'^2 - T' h'^2 \right) = \frac{1}{6} \left(T - T' \right) \left(h^2 + h'^2 \right) .$$

Из фигуры видно, что

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}\, b \cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha \\ h' &= \frac{1}{2}\, b \cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha \end{aligned}\right\} \qquad \text{откуда} \qquad h^2 + h'^2 = \frac{1}{2}\left(b^2\cos^2\alpha + c^2\sin^2\alpha\right).$$

Таким образом, момент инерции трапеции *BCDE* относительно оси *oo* равен

$$\frac{1}{12}\left(T - T'\right)\left(b^2\cos^2\alpha + c^2\sin^2\alpha\right)$$

Момент инерции прямоугольника, который вдвое больше, обозначая через Ω площадь прямоугольника (равную $2(T - T')$), равен

$$I = \frac{\Omega}{12}\left(b^2\cos^2\alpha + c^2\sin^2\alpha\right) \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{12}\, b\, c\left(b^2\cos^2\alpha + c^2\sin^2\alpha\right)$$

$$M_1 = \frac{R_1 I}{h} = \Omega\, R_1 \frac{b^2\cos^2\alpha + c^2\sin^2\alpha}{6\left(\cos\alpha + \sin\alpha\right)}.$$

Эти формулы совпадают с формулами пункта 102, когда $\alpha = 90°$.

108. Когда предыдущий прямоугольник становится квадратом, имеем $b = c$ и

$$I = \frac{1}{12}\, A\, b^2,$$

независимо от α. Но не так обстоит дело с M_1, максимум которого, соответствующий $h = \frac{1}{2}\, b$ или $\alpha = 0$, равен $\frac{1}{6}\,\Omega\, R_1\, b$, а минимум, соответствующий $h = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ или $\alpha = 45°$, равен $\frac{1}{6\sqrt{2}}\,\Omega\, R_1\, b$.

109. Цилиндрическая труба. (фиг. 24)

Предположим сначала, что она очень тонкая: будем иметь

$$\sum v^2\, d\omega = \sum u^2\, d\omega \qquad \text{откуда} \qquad \sum v^2\, d\omega = \frac{1}{2}\sum\left(v^2 + u^2\right) d\omega$$

Следовательно $I = \sum v^2\, d\omega = \frac{I^2\,\Omega}{2}$ или $\pi\, r^3\, \epsilon$

и $M = \frac{R_1 I}{r} = \frac{1}{2}\, R_1\,\Omega\, r$ или $R_1\,\pi\, r^2\,\epsilon$ (*)

называя r радиусом и ϵ малой толщиной трубы, за исключением замечания пункта 103. Если толщина не очень мала по сравнению с радиусом, пусть r' и r'' — радиусы внутренней и внешней окружностей; имеем

$$I = \int_{r'}^{r''} \pi\, r^3\, d\, r = \frac{1}{4}\,\pi\left(r''^4 - r'^4\right) = \frac{\Omega}{4}\left(r''^2 + r'^2\right)$$

и

(*) Формулировка неясной для "*или* $\pi\, r^3\,\epsilon$ " и "или $R_1\,\pi\, r^2\,\epsilon$ ", если не помещать ее в контекст *устного курса*, что позволяет исключить, соответственно, *I*= и *M*=

$$M = \frac{R_1 I}{r''} = \frac{1}{4} R_1 \Omega \ \frac{r''^2 + r'^2}{r''} .$$

110. Сплошного круглого цилиндра: делая $r' = 0$ и $r'' = r$, имеем:

$$I = \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{\Omega}{4} r^2 \qquad \text{и} \qquad M' = \frac{1}{4} R_1 \Omega r .$$

111. Сплошной эллипс, один из главных диаметров которого является осью момента инерции (фиг. 25)

Пусть $AB = 2a$ и $CD = 2b$. Сравнивая эллипс с кругом, диаметр которого равен $2b$, видим, что обе поверхности могут быть разложены на одно и то же число маленьких прямоугольников одинаковой высоты, попарно, и основания которых находятся в отношении a к b. Следовательно (102), то же самое справедливо для моментов инерции. Получаем, таким образом (110),

$$I = \frac{1}{4} \pi b^4 . \frac{a}{b} = \frac{1}{4} \pi ab^3 \qquad \text{или} \qquad I = \Omega \frac{b^2}{4}$$

и

$$M_1 = R_1 \Omega \frac{b}{4}$$

Если бы осью моментов был какой-либо диаметр, назовем его $2a'$, обозначим через $2b'$ его сопряженный диаметр и через α их угол, достаточно в предыдущих формулах заменить a на a' и b на $b' \sin \alpha$.

112. Произвольная плоская поверхность (фиг. 26). Пусть дана поверхность $KLNM$, ограниченная двумя прямыми KL, MN, параллельными оси oo момента инерции, и двумя кривыми KM, LN. Пусть u обозначает длину хорды PQ, параллельной oo, а v — её расстояние до этой оси. Для этой поверхности момент инерции равен

$$I = \int_K^{K+l} v^2 . u dv .$$

Чтобы получить приближенное значение этого интеграла, делим расстояние от KL до MN на четное число n равных частей; проводя через точки деления параллели оси, которые, включая KL и MN, будут обозначены u_0, u_1, u_2, ... u_n, обозначаем через δ расстояние $\frac{l}{n}$ между двумя последовательными параллелями и полагаем по формуле Т. Симпсона:

$$I = \frac{\delta}{3} \left(K^2 u_0 + 4 (K + \delta)^2 u_1 + 2 (K + 2\delta)^2 u_2 + 4 (K + 3\delta)^2 u_3 + ... + 4 (K + l - \delta)^2 u_{n-1} + (K + l)^2 u_n \right) .$$

Когда кривые KM, LN мало изрезаны, достаточно взять $n = 4$. Параллели u_0, u_n могут быть нулевыми.

§: 4 Призмы, подверженные поперечной равномерно распределенной нагрузке и разрывным силам в одной плоскости.

1° Общие сведения по этому вопросу

113. Пусть OB (фиг. 27) — часть призмы, продольные ребра которой составляют на конце O очень малый угол COD или α с горизонталью OC. Длина призмы обозначена через a. Её равномерно распределенная нагрузка равна pa. Кроме того, это тело подвержено вертикальным силам P', P'', ..., $P^{(n)}$ расстояния которых до начала O равны x',x'' ,. . . ., $x^{(n)}$.

Ввиду малой кривизны детали эти расстояния безразлично, OM', OM'', ..., $OM^{(n)}$, отсчитываемые по детали, или ON', ON'', ..., $ON^{(n)}$ отсчитываемые по горизонтали O_x.

Пусть M — произвольная точка на средней линии детали между O и m', и пусть x и y — её прямоугольные координаты. Применим к твердому телу, заключенному между плоскостью aMa' и концом B, общие соображения §: 2, пункты 93 и следующие. Будем иметь (95)

$$[\,1\,] \ldots . \sum M\{A\}_M = \frac{1}{2}\, p\,(a-x)^2 + P'(x'-x) + P''(x''-x) + \ldots\ P^{(n)}\left(x^{(n)}-x\right)$$

Подставляя для ∑ M {A}_M либо его второе выражение (99), либо третье (100), получаем два уравнения:

$$\left.\begin{array}{l} [\,2\,] \ldots . \ldots . \dfrac{R}{V'}\, I \\ \\ [\,3\,] \ldots . \ldots . \dfrac{E}{\rho} \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\, p\,(a-x)^2 + P'(x'x) + P''(x''-x) + \ldots\ P^{(n)}\left(x^{(n)}-x\right)$$

В этих уравнениях v' и I — постоянные, зависящие от сечения призмы; E — постоянная, зависящая от материала призмы; R' — максимальное сопротивление на единицу поверхности в сечении aa', и ρ — радиус кривизны в M — переменные, зависящие от x, единственной переменной правой части.

Для любой точки между m' и M'' мы будем иметь два уравнения, которые будут отличаться от двух предыдущих только тем, что P' исчезнет. И так далее до конца B детали.

114. Если силы P', P'' . . . ., $P^{(n)}$ положительны, т. е. если они имеют направление, указанное на фигуре, общая правая часть двух приведенных выше уравнений убывает с ростом x: наибольшее значение R' и наибольший изгиб (или наименьший радиус кривизны) имеют место в начале O. Это может быть не так, когда силы P все или частично отрицательны, и анализ значений правой части позволит узнать точки наибольшего натяжения или наибольшего изгиба, а также точки перегиба (т. е. нулевого изгиба), где натяжение равно нулю, как в конце B. Если алгебраическая сумма сил P', P'',

. . . ., $P^{(n)}$ равна нулю, они были бы эквивалентны паре, момент которой относительно M был бы постоянным; и если в то же время $pa = 0$, ρ было бы постоянным между O и m', то есть кривая OM' была бы окружностью.

115. Если в уравнение [1] мы подставим для $\sum M\{A\}_M$ его четвертое выражение (101), получим

$$[\,4\,] \ldots\ldots\ldots \quad EI\int''(x) = \frac{1}{2}\,p\,(a-x)^2 + P'(x'-x) + P''(x''-x) + \ldots + P^{(n)}(x^{(n)}-x)$$

уравнение, которое имеет место только между O и m'. Умножая на dx и интегрируя, получим для любой точки между O и m':

$$[\,5\,] \ldots \quad EI\left(f'(x) - \tan\alpha\right) = \frac{1}{2}\,p\left(a^2x - ax^2 + \frac{x^3}{3}\right) + P'\left(x'x - \frac{x^2}{2}\right) + P''\left(x''-x\right) + \ldots + P^{(n)}\left(x^{(n)}-x\right)$$

Умножая снова на dx и интегрируя, получим, всегда для точки между O и m', при начале координат в O:

$$[\,6\,] \qquad EI\,(x - y\tan\alpha) = \frac{1}{2}\,p\left(\frac{a^2x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) + P'\left(\frac{x'x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + P''\left(\frac{x''x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + P^{(n)}\left(\frac{x^{(n)}x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

Таким образом, если величины α, P', x', P'', x'', ...,$P^{(n)}$, $x^{(n)}$ заданы, можно найти наклон $f'(x)$ и ординату в любой точке кривой OM', задавшись её абсциссой x.

Теперь между m' и M'' имеем уравнение, подобное формуле [4], за исключением исчезновения P', а именно:

$$[\,7\,] \ldots\ldots \quad EI\,f''_1(x) = \frac{1}{2}\,P\,(a-x)^2 + P''(x''-x) + \ldots\ldots\ldots + P^{(n)}(x^{(n)}-x)\ ;$$

его интеграл, аналогичный формуле [5] за исключением постоянной, есть

$$EI\,f'_1(x) - C = \frac{1}{2}\,p\left(a^2x - ax^2 + \frac{x^3}{3}\right) + P''\left(x''-x-\frac{x^2}{2}\right) + \ldots\ldots + P^{(n)}\left(x^{(n)}x - \frac{x^2}{2}\right)$$

Если в этом уравнении и в [5] положить $x = x'$, наклоны $f'(x)$ и $f'_1(x)$, принадлежащие обе точке m', становятся равными, и вычитанием получаем

$$C - EI\tan\alpha = P'\,.\,\frac{x'^2}{2}\ ;$$

Следовательно, предыдущее уравнение становится

$$[\,8\,] \quad EI\left(f'_1\,x - \tan\alpha\right) = \frac{1}{2}\,p\left(a^2x - ax^2 + \frac{x^3}{3}\right) + P'\,\frac{x'^2}{2} + P''\left(x''x - \frac{x^2}{2}\right) + \ldots\ldots + P^{(n)}\left(\frac{x^{(n)}x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

Его интеграл для любой точки от m' до M'' есть

$$EI\,(y - x\tan\alpha) - C' = \frac{1}{2}\,p\left(\frac{a^2x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) + P'\,\frac{x'^2x}{2} + P''\left(\frac{x''x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \ldots + P^{(n)}\left(\frac{x^{(n)}x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Если в этом уравнении и в [6] положить x и y равными координатам x' и y' точки m', оба уравнения удовлетворяются, и вычитание дает постоянную

$$C' = -P' \frac{x'^3}{6} .;$$

следовательно, уравнение кривой между m' и M'' есть

[9] $$EI\,(y - x\tan\alpha) = \frac{1}{2}\,p\left(\frac{a^2x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) - P'\frac{x'^3}{6} + P'\frac{x'^3 x}{2} + P''\left(\frac{x''x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \ldots + P^{(n)}\left(\frac{x^{(n)}x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

Продолжая так далее, получим наклон кривой и ординату на конце B.

Мы применим эти общие результаты к некоторым частным случаям.

2° Части горизонтальной призмы, заделанной одним концом, подверженной вертикальной силе на другом конце и, кроме того, равномерно загруженной по всей длине.

Нужно в предыдущих формулах положить

$\alpha = 0$, $x' = a$, $P' = P$ — крайняя сила, положительная или отрицательная;

$P' = P'' = \ldots = 0$. p остается равномерной нагрузкой на единицу длины; и формулы становятся (как можно было бы получить и непосредственно):

$$\left.\begin{array}{ll} [\,1,\,2°\,] & \sum M\,\{A\}_M \ldots\ldots \\ [\,2,\,2°\,] & = \dfrac{R'I}{v'} \ldots\ldots\ldots \\ [\,3,\,2°\,] & = \dfrac{EI}{\rho} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ [\,4,\,2°\,] & = EI\,f''(x)\ldots \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\,p\,(\alpha - x)^2 + P\,(a - x)$$

[5, 2°] $$EI\,f'(x) = \frac{1}{2}\,p\left(\alpha^2 x - ax^3 + \frac{x^3}{3}\right) + P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right)$$

[6, 2°] $$EI\,y = \frac{1}{2}\,p\left(\frac{a^2x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) + P\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

117. Если P положительно, наибольшее значение правой части первых уравнений соответствует $x = 0$; таким образом, называя R наибольшим сопротивлением на единицу поверхности материала призмы (99), необходимо, чтобы силы pa и P, одна распределенная, другая приложенная в B, удовлетворяли уравнению

$$\frac{R'I}{v'} = \frac{1}{2}\,pa\,.\,a + Pa\ ,$$

что доказывает, что в отношении состояния натяжения и изгиба детали в O, а следовательно, и в отношении опасности достижения и превышения предела упругости, распределенная нагрузка pa производит тот же эффект, как если бы она была приложена посередине детали, или как если бы сила, равная половине $\frac{pa}{2}$, была приложена к концу B.

118. Если P отрицательно, уравнение [2] становится, обозначая буквой P только абсолютное значение крайней силы:

$$\frac{R'I}{v'} = \frac{1}{2}\,p\,(a-x)^2 - P\,(a-x)$$

или

$$\frac{RI}{v'} = \frac{1}{2}\,p\left(a-x-\frac{P}{p}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\frac{P^2}{p}\,.$$

Правая часть может быть представлена ординатой параболы, минимум которой (алгебраический) равен $\frac{1}{2}\frac{P^2}{p}$ и соответствует $x = a - \frac{P}{p}$.

В точке с этой абсциссой правая часть отрицательна, то есть кривая вогнута сверху. То же самое для всех точек, расположенных между концом B, где $x = a$ делает правую часть нулевой, и другой точкой, где эта правая часть снова становится нулевой, что соответствует $x = a - \frac{2P}{p}$. Начиная с этой точки, когда последняя величина положительна, т. е. когда , $pa > 2P$ по мере продвижения назад к началу O правая часть, став положительной, возрастает и при $x = 0$ принимает значение $\frac{1}{2}\,pa^2 - Pa$. Таким образом, для определения точки наибольшей кривизны или наибольшего натяжения нужно различать несколько случаев:

1° Если $a < \frac{P}{p}$ или $pa < P$, кривизна местами отрицательна, и максимум абсолютного значения момента упругости, соответствующий $x = 0$, равен $Pa - \frac{1}{2}\,pa^2$.

2° Если $a > \frac{P}{p}$ но $a < \frac{2P}{p}$, кривизна также везде отрицательна, но максимум абсолютного значения момента упругости, соответствующий $x = a - \frac{P}{p'}$, равен $\frac{1}{2}\frac{P}{p}$.

3° Если $a > \frac{2P}{p}$, кривизна равна нулю в точке с абсциссой $x = a - \frac{2P}{p}$, и максимум абсолютного значения момента упругости есть наибольшее из двух величин

$$\frac{1}{2}\,\frac{P^2}{p} \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{2}\,pa^2 - Pa\,.$$

Определив таким образом максимум момента упругости, можно будет убедиться, не превышает ли он значение $\frac{R_1 I}{v'}$.

119. Полагая $x = a$ в уравнении [6] пункта 116, получим для значения y высоту h крайней точки B ниже горизонтали 0_x, а именно:

$$h = \frac{1}{E\,I}\left(\frac{pa^4}{8} + \frac{Pa^3}{3}\right).$$

Таким образом, часть h, обусловленная равномерно распределенной нагрузкой p, составляет лишь $\frac{3}{8}$ от того, что было бы, если бы та же нагрузка была сосредоточена на конце B.

3° Призма, опертая на две опоры на одном уровне и подверженная вертикальной силе P *в точке* C*, помимо равномерно распределенной нагрузки pa по всей длине a - фигура 28*

120. Реакции, оказываемые опорами A, B, можно считать вертикальными. Их значения:

$$\text{в A} \ldots \ \frac{1}{2}\, pa + P\,\frac{d'}{a}, \qquad \text{в B} \ldots \ \frac{1}{2}\, pa + P\,\frac{d}{a} \ldots$$

Для точки, расположенной между A и C, называя x её расстояние от конца A, переменный момент упругости равен моменту относительно этой точки сил, действующих между этой же точкой и A:

$$[\,1\,] \ldots \ \frac{R'I}{V'} = \left(\frac{1}{2}\, pa + \frac{Pd'}{a}\right) x - \frac{1}{2}\, px^2 = \frac{1}{2}\, px\left(a + \frac{2\,Pd'}{pa} - x\right)$$

Эта величина пропорциональна квадрату ординаты, соответствующей абсциссе x в окружности, диаметр которой, равный $a + \frac{2\,P\,d'}{pa}$, имеет начало в A. Следовательно, если $d < \frac{1}{2}\,a$, наибольшее значение R' на кривой AC имеет место в точке C. Если, напротив, $d > \frac{1}{2}\,a$, максимум R' соответствует максимуму ординаты окружности, диаметр которой AD (фиг. 29) получается откладыванием вправо от конца B длины $\frac{2\,P\,d'}{pa}$. Максимум, соответствующий точке O — середине AD. Если эта середина находится между A и C, то там и есть наибольшее натяжение R'; в противном случае оно в C.

Следовательно, достаточно проверить, меньше или больше $\frac{1}{2}\,AD$, чем AC, т. е. < или > $\frac{1}{2}\,a + \frac{P\,d'}{pa}$, чем d.

В первом случае имеем максимум $\frac{R'I}{v'}$, полагая в уравнении [1]

$$x = \frac{1}{2} \quad AD = \frac{1}{2}\,a + \frac{Pd'}{pa}, \text{ что дает}$$

$$\frac{R'I}{v'} = \frac{1}{2}\, p\left(\frac{1}{2}\,a + \frac{Pd'}{pa}\right)^2.$$

Во втором случае максимум $\frac{R'I}{v'}$ получается, полагая $x = d'$ в уравнении [1], и имеем

$$\frac{R'I}{v'} = \left(P + \frac{1}{2}\, pa\right)\frac{dd'}{a},$$

как если бы равномерно распределенная нагрузка pa была заменена единственной силой $\frac{1}{2}\, pa$, приложенной вместе с силой P в точке C.

С помощью этих формул, зная a, d, pa, I и v', можно, подставляя вместо R' значение R, которое нельзя превышать, определить наибольшее значение, которое можно придать P.

121. Когда C находится в середине AB, имеем $d = d' = \frac{1}{2}\,a$, мы находимся во втором случае, и приведенная выше формула становится

$$\frac{R'I}{v'} = \frac{a}{4}\left(P = \frac{1}{2}\,pa\right).$$

Следовательно, в отношении натяжения или давления R' и кривизны в C распределенная нагрузка эквивалентна силе $\frac{1}{2}\,pa$, приложенной в C.

122. В частном случае, когда pa равно нулю или им можно пренебречь по сравнению с P, уравнение [1] пункта 120 сводится к

$$\frac{R'I}{v'} = \frac{P\,d'}{a}\,x,$$

которое легко было бы получить *a priori*, доказывает, что сопротивление R', равное нулю на каждом конце детали, возрастает до C — точки приложения силы P. Его максимум, следовательно, имеющий место в C, удовлетворяет уравнению

$$\frac{R'I}{v'} = \frac{P\,d'\,d}{a},$$

и наибольшее значение P, чтобы не превысить сопротивление R_1, равно

$$P = \frac{a}{dd'}\,\frac{v'}{R_1 I}.$$

123. Частный случай, когда P равно нулю, также содержится в предыдущих формулах.

124. В общей гипотезе пункта 120 можно было бы задаться целью определить кривую средней линии детали. Следовало бы действовать по методу, указанному в пункте 115: предполагая известным наклон $tan\ \alpha$ этой кривой в точке A, определить ординату и наклон кривой в C как функции $tan\ \alpha$, затем ординату точки B, и, приравнивая последнюю нулю, получить уравнение для определения $tan\ \alpha$, а следовательно, и ординату для любой абсциссы кривой.

125. В частном случае, когда C — середина AB, кривая горизонтальна в этой точке, и стрелу прогиба получаем, подставляя в выражение h пункта 119 $\frac{1}{2}a$ вместо a и $\frac{1}{2}(P + pa)$ вместо P, а затем изменив знак результата. Получаем

$$f = \frac{1}{48}\,\frac{a^3}{EI}\left(P + \frac{5}{8}\,pa\right).$$

Следовательно, в отношении образования стрелы прогиба равномерно распределенная нагрузка pa эквивалентна силе $\frac{5}{8}\,pa$, приложенной в середине C.

4° Призма, опертая на две опоры AB на одном уровне и подверженная разрывным вертикальным силам P′, P″, P‴ ...

126. Пусть (фиг. 30) $AB = a$, $AC' = x'$, $AC'' = x''$ . . . . . Реакции Q', Q опор, будучи практически вертикальными, определяются двумя из трех уравнений:

$$Q\,a = P'\,x' + P''\,x'' + P'''\,x''' + \ldots\ldots$$
$$Q'\,a = P'\,(a - x') + P''\,(a - x'') + P'''\,(a - x''') + \ldots.$$
$$Q + Q' = P' + P'' + P''' + \ldots\ldots$$

Приняв это, можно применить то, что было сказано в пунктах 113, 114 и 115, с той разницей, что уравнения будут проще, так как нет непрерывно распределенной силы *pa*.

Обозначая всегда через R' и ρ две переменные — крайнее сопротивление и радиус кривизны в сечении, определяемом абсциссой x.

Для любой точки

на кривой AC: $$\frac{R'\,I}{v'} = \frac{EI}{\rho} = -\,Q'\,x$$

на кривой C'C'': $$\frac{R'\,I}{v'} = \frac{EI}{\rho} = -\,Q'\,x + P'\,(x - x')$$

на кривой $C^{(n-1)}C^{(n)}$: $$\frac{R'\,I}{v'} = \frac{EI}{\rho} = -\,Q\,(a - x) + P^{(n)}\,(x^{(n)} - x)$$

на кривой $C^{(n)}B$: $$\frac{R'\,I}{v'} = \frac{EI}{\rho} = -\,Q\,(a - x)$$

Можно заметить:

1° что при вычислении суммы моментов, дающей правую часть одного из этих уравнений, безразлично, брать ли силы, расположенные справа, или те, что слева от рассматриваемой части;

2° что когда правая часть отрицательна (что зависит от значений и знаков сил P и что всегда имеет место, когда эти силы положительны), кривая вогнута в сторону, противоположную направлению этих сил;

3° что две кривые, сходящиеся в любой точке приложения C, имеют в этой точке не только одну и ту же касательную, но и одну и ту же кривизну;

4° что правая часть каждого уравнения является линейной функцией x первой степени, следовательно, её наибольшее значение на протяжении той части кривой, которой она принадлежит, имеет место в одной из крайних точек этой части; отсюда следует, что если положить $x = x'$ в первом уравнении, $x = x''$ в третьем и т. д., наибольшее из полученных значений правых частей, равных $\frac{EI}{\rho}$ и $\frac{R'\,I}{v'}$, даст наибольшую кривизну $\frac{1}{\rho}$ и наибольшее сопротивление R' на протяжении детали.

127. Метод, указанный в пунктах 124 и 125, привел бы к определению формы детали на всем её протяжении.

5° Призма, закрепленная горизонтально в заданной точке A, *опертая одним концом* B *на опору, подверженная на промежутке равномерно распределенной нагрузке ра на длине* AB = *a и отдельной силе* P, *приложенной в точке* C. *(фиг. 31)*

128. Пусть $AC = x'$ и пусть h — высота точки B ниже горизонтали A_x. x' и h заданы, как и a, p и P. Пусть Q — практически вертикальная реакция опоры B на деталь.

Метод для определения этой неизвестной силы основан на следующем замечании: если бы она была задана, то с помощью анализа пункта 115 можно было бы определить ординату h точки B. Мы получили бы непосредственно следующие шесть уравнений, которые выводятся из уравнений пункта 115, полагая $\alpha = 0$, заменяя P' на P, P'' на $-Q$, x'' на a и опуская члены, относящиеся к силам $P''' \ldots . P^{(n)}$. Получаем, между A и C:

$$[\ 1\ ] \ldots . \quad EI\, f''(x) = \frac{1}{2}\, p\,(a-x)^2 + P\,(x'-x) - Q\,(a-x)$$

$$[\ 2\ ] \ldots . \quad EI\, f'(x) = \frac{1}{2}\, p\left(a^2 x - a\,x^2 + \frac{x^3}{3}\right) + P\left(x'\,x - \frac{x^2}{2}\right) - Q\left(ax - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$[\ 3\ ] \ldots . \quad EI\, y = \frac{1}{2}\, p\left(\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{a\,x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) + P\left(\frac{x'\,x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - Q\left(\frac{a\,x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

и между C и B:

$$[\ 4\ ] \ldots . \quad EI\, f''_1(x) = \frac{1}{2}\, p\,(a-x)^2 - Q\,(a-x)$$

$$[\ 5\ ] \ldots . \quad EI\, f'_1(x) = \frac{1}{2}\, p\left(a^2 x - ax^2 + \frac{x^3}{3}\right) + P\left(\frac{x'^2}{2}\right) - Q\left(ax - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$[\ 6\ ] \ldots . \quad EI\, y = \frac{1}{2}\, p\left(\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) - P\,\frac{x'^3}{6} + P\,\frac{x'^2 x}{2} - Q\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Теперь значение Q должно быть таково, чтобы это уравнение [6] удовлетворялось при $x = a$ и $y = h$. Имеем, следовательно,

$$EI\, h = \frac{1}{2}\, pa^4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) + \frac{Px'^2}{2}\left(a - \frac{x'}{3}\right) - Q\,\frac{a^3}{3}$$

откуда

$$Q = P\,\frac{x'^2\,(3\,a - x')}{2\,a^3} + \frac{3}{8}\, pa - 3\,\frac{EI\, h}{a^3} \quad \ldots\ldots\ldots [\ 7\ ]$$

Это значение, будучи подставленным в шесть предыдущих уравнений, позволит узнать для любой точки момент упругости, сопротивление R', кривизну $\frac{1}{\rho}$, наклон $f'(x)$ или $f'_1(x)$, и ординату y.

129. Если между A и B существует точка перегиба, её определяют, приравнивая нулю правую часть уравнения [1] или [4].

130. Частный случай. $h = 0$ и $p = 0$, откуда следует $Q = P\,\frac{x^2(3a-x)}{2a^3}$. Уравнение [4] становится $M\{A\} = -Q(a-x)$, что показывает, что от C до B кривизна убывает по абсолютной величине и становится равной нулю в B. Уравнение [1] можно записать так:

$$M\{A\} = Px' - Qa - (P-Q)x \quad \ldots\ldots [\,8\,]$$

величина положительная или отрицательная в зависимости от того, направлена ли вогнутость кривой вниз или вверх. Эта функция, будучи первой степени, принимает все свои значения между крайними, а именно:

для $x = 0$ $\qquad Px' - Qx$

для $x = x'$ $\qquad -Q(a-x')$

Первая, очевидно, отрицательна. Вторая положительна, в противном случае все значения $M\{A\}$ от A до C были бы отрицательны, и, поскольку то же самое было бы между C и B, кривая, везде вогнутая вверх, не могла бы проходить через B.

Приняв это, наибольшая кривизна будет иметь место в точке A или в точке C в зависимости от того, является ли положительная величина:

$$Px' - Qa \quad \text{будет} \quad > \quad \text{или} \quad < \quad Q(a-x')$$

Положим $\qquad Px' - Qa - Q(a-x') = \beta\, P\, x'$

Два случая неравенства будут иметь место в зависимости от того, будет ли β положительным или отрицательным. Подставляя значение Q, имеем

$$P\,x' - P\,\frac{x'^2(3a-x')}{2a^3}(2a-x') = \beta\, P\, x'$$

или $2 - \frac{x'}{a}\left(3 - \frac{x'}{a}\right)\left(2 - \frac{x'}{a}\right) = \beta$ или, наконец, $n^3 - 5n^2 + 6n - 2 = -\beta$

делая $\frac{x}{a} = n$, если предположим $\beta = o$, один из корней этого уравнения равен $n = 1$, что и должно было быть, поскольку если $x' = a$, то кривизны в A и C равны нулю. Последнее уравнение, деленное на $(n-1)$, становится

$$n^2 - 4n - 2 = \frac{\beta}{1-n} \quad \text{откуда} \quad n = 2 - \sqrt{2 + \frac{\beta}{1-n}},$$

только одно значение, ввиду того, что $n < 1$.

Если $\beta = 0$, имеем $n = 0{,}586$, и две противоположные кривизны направления в A и C имеют одинаковую абсолютную величину.

Если $\beta > 0$, имеем $n = 0{,}586$; все наоборот, если $\beta > 0$.

Таким образом, в зависимости от того, x' > или < 0,586, наибольшая кривизна будет в A или C.

131. Длина стрелы прогиба. Предполагая, что самая низшая точка кривой находится между C и B, приравняем нулю правую часть уравнения [5], полагая в нем $p = 0$ и $Q = P\,\frac{x'^2(3a-x')}{2a^3}$.

Найдем $$x = a\left(1 - \sqrt{\frac{a - x'}{3\,a - x'}}\right).$$

Эта величина должна быть больше x', поставим $a - a\sqrt{\frac{a-x'}{3\,a-x'}} > x'$

откуда $a - x' > a\sqrt{\frac{a-x'}{3\,a-x'}}$ или $(3\,a - x')(a - x') > a^2$, или $4\,a^2 - 4\,ax' + x'^2 > 2\,a^2$. или $2\,a - x' > a\sqrt{2}$, наконец $x' < a(2 - \sqrt{2})$ или $x' < 0{,}586\,a$.

Таким образом, в зависимости от того, $x' < 0{,}586\,a$ или $x' > 0{,}586\,a$, самая нижняя точка кривой находится между C и B или между C и A.

Принимая первую гипотезу, подставим приведенное выше значение x в уравнение [6] и получим, обозначая стрелу прогиба через f,

$$EI\,f = P\,\frac{x^2(a - x')}{6}\sqrt{\frac{a - x'}{3\,a - x'}}$$

132. Более частный случай. $\rho_0 = 0$, $p = 0$, $x' = \frac{1}{2}a$.

Наибольшая кривизна — в A, а самая низшая точка — между B и C. Подставляя эти значения в уравнение [7] пункта 128, имеем

$$Q = \frac{5}{16}P.$$

Подставляя это значение в [8] пункта 130 и полагая $x = 0$, получаем в точке A

$$\frac{EI}{\rho} = \frac{R'I}{v'} = \frac{1}{2}Pa - \frac{5}{16}Pa = \frac{3}{16}Pa,$$

в то время как если бы деталь была свободно оперта в A (121) и B, максимум $\frac{EI}{\rho}$ был бы в C и равен $\frac{1}{4}Pa$.

Подстановка $x' = \frac{1}{2}a$ в окончательную формулу пункта 131 дает

$$f = \frac{1}{48}\frac{Pa^3}{EI}\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{0{,}45}{48}\frac{Pa^3}{EI},$$

в то время как при свободном опирании стрела была бы (125) $\frac{1}{48}\frac{Pa^3}{EI}$.

133. Другие частные случаи: $h = 0$ и $P = 0$. Значение Q из [7] становится $Q = \frac{3}{8}pa$. И уравнения [1] и [4] пункта 128 сводятся для всей кривой AB к

$$M\{A\} = \frac{1}{2}p(a - x)^2 - \frac{3}{8}pa(a - x) = \frac{1}{2}p(a - x)\left(\frac{1}{4}a - x\right).$$

Эта величина равна нулю при $x = a$ (т. е. в конце B) и при $x = \frac{1}{4}a$, что указывает точку перегиба детали. Максимум кривизны между точкой перегиба и концом B получается приравниванием нулю производной правой части:

$$\frac{-1}{4}a + x - a + x = 0 \qquad \text{или} \qquad x = \frac{5}{8}a.$$

Подставляя, получаем искомый максимум $M\{A\}$ по абсолютной величине

$$\frac{EI}{\rho} = \frac{T'I}{v'} = \frac{9}{128} pa^2$$

От конца A до точки перегиба кривизна уменьшается; наибольшее значение момента упругости, полученное при значении $x = 0$ в приведенном выше общем выражении, равно:

$$\frac{EI}{\rho} = \frac{T'I}{v'} = \frac{1}{8} pa^2 = \frac{16}{128} pa^2$$

и, следовательно, превышает вышеуказанный максимум.

Когда деталь просто оперта на обоих концах, также имеем в точке наибольшей кривизны $\frac{EI}{\rho} = \frac{1}{8} pa^2$, но эта точка находится посередине детали.

134. Самая низшая точка кривой находится приравниванием нулю правой части уравнения [5] после подстановки $p = 0$ и $Q = \frac{3}{8} pa$. Имеем, опуская множитель x, соответствующий точке A:

$$\frac{1}{2} p\left(a^2 - ax = \frac{x^2}{3}\right) - \frac{3}{8} pa\left(a - \frac{x}{2}\right) = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - \frac{15}{8} ax + \frac{3}{4} a^2 = 0$$

Подставляя это значение в уравнение [6] при $P = 0$ и $Q = \frac{3}{8} pa$, находим для стрелы прогиба f:

$$EI\ f = 0{,}0067 \ldots . pa \,.\, a^3,$$

примерно вдвое больше предыдущего значения.

6° Призма, закрепленная горизонтально в двух точках AB на одном уровне, подверженная на промежутке равномерно распределенной нагрузке pa по длине AB = a и отдельной силе P, приложенной в точке C

135. Фиг. 32. Пусть Q — вертикальная реакция опоры в точке B. Можно всегда предположить, что деталь удерживается горизонтально в B с помощью верхней опоры, оказывающей в B' вертикальную реакцию Q', расстояние которой от точки A равно a'.

Рассматривая Q' и Q как известные, следуем методу, аналогичному методу пункта 128; найдем наклон и ординату в точке B и приравняем их обоих нулю, что определит Q и Q'.

Для этого в шести формулах пункта 115 положим $\alpha = 0$, заменим P' на P, x' на δ, P'' на $-Q$, x'' на a, P''' на Q', x''' на a', опуская члены, относящиеся к другим силам $P^{IV} \ldots . P^{(n)}$.

Получим следующие шесть уравнений, которые можно было бы также получить непосредственно:

1° для кривой AC:

$$[\,1\,]\ldots\quad EI\,f''(x)=\frac{1}{2}\,p\,(a-x)^2+P\,(\delta-x)-Q\,(a-x)+Q'\,(a'-x)$$

$$[\,2\,]\ldots\quad EI\,f'(x)=\frac{1}{2}\,p\left(a^2\,x-ax^2+\frac{x^3}{3}\right)+P\left(\delta\,x-\frac{x^2}{2}\right)-Q\left(ax-\frac{x^2}{2}\right)+Q'\left(a'\,x-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$[\,3\,]\ldots\quad EI\,y=\frac{1}{2}\,p\left(\frac{a^2\,x^2}{2}-\frac{ax^3}{3}+\frac{x^4}{12}\right)+P\left(\frac{\delta\,x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)-Q\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+Q'\left(\frac{a'\,x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)$$

2° для кривой CB:

$$[\,4\,]\ldots\quad EI\,f''_1(x)=\frac{1}{2}\,p\,(a-x)^2-Q\,(a-x)+Q'\,(a'-x)$$

$$[\,5\,]\ldots\quad EI\,f'_1(x)=\frac{1}{2}\,p\left(a^2\,x-ax^2+\frac{x^3}{3}\right)+P\,\frac{\delta^2}{2}-Q\left(ax-\frac{x^2}{2}\right)+Q'\left(a'\,x-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$[\,6\,]\ldots\quad EI\,y=\frac{1}{2}\,p\left(\frac{a^2\,x^2}{2}-\frac{ax^3}{3}+\frac{x^4}{12}\right)-\frac{P\,\delta^3}{6}+\frac{P\,\delta^2\,x}{2}-Q\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+Q'\left(\frac{a'\,x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)$$

Приняв это, согласно условию, уравнения [5] и [6] должны удовлетворяться при $x = a,\ f'_1(x) = 0;\ y = 0$, что дает:

$$[\,7\,]\ldots\quad 0=\frac{1}{6}\,pa^3+P\,\frac{\delta^2}{2}-Q\,\frac{a^2}{2}+Q'\,a\left(a'-\frac{a}{2}\right)$$

$$[\,8\,]\ldots\quad 0=\frac{1}{8}\,pa^4+P\,\frac{\delta^2}{2}\left(a-\frac{\delta}{3}\right)-Q\,\frac{a^3}{3}+Q'\,\frac{a^2}{2}\left(a'-\frac{a}{3}\right)$$

Два уравнения первой степени для двух неизвестных Q и Q'.

136. Частный случай $p = 0$. Для упрощения вычислений отвлечемся от веса детали и распределенной нагрузки. При $p = 0$ уравнение [1] можно записать так:

$$\frac{EI}{\rho}=\frac{R'\,I}{v'}=P\,\delta+Q'\,a'-Qa-(P-Q+Q')\,x\,.$$

Это выражение момента упругости, будучи первой степени, из этого следует, что от A до C наибольшая кривизна или наибольшее сопротивление R' имеет место в A или C. Пусть μ и μ' — моменты упругости в этих двух точках; их получаем, полагая последовательно $x = 0$ и $x = \delta$. Имеем, таким образом,

$$\mu=P\,\delta+Q'\,a'-Q\,a \qquad \text{и} \qquad \mu'=Q'\,a'-Q\,a+(Q-Q')\,\delta\ .$$

Чтобы сравнить эти две величины, нужно получить значения Q и Q' из уравнений [7] и [8] после подстановки $p = 0$. Получаем:

$$Q'=P'\,\frac{\delta^2\,(a-b)}{a^2\,(a-a')} \qquad \text{и} \qquad Q=P\,\frac{\delta^2\,(3\,aa'-2\,a^2+\delta\,a-2\,\delta\,a')}{a^2\,(a-a')}$$

Отсюда заключают

$$Q'\,a'-Q\,a=P\,\frac{\delta^2\,(\delta-2\,a)}{a^2} \qquad \text{и} \qquad Q-Q'=P\,\frac{\delta^2\,(3\,a-2\,\delta)}{a^3}\ .$$

таким образом, μ положителен, μ' отрицателен, и отношением их абсолютных значений

$$-\frac{\mu}{\mu'} = \frac{a}{2\delta};$$

так что μ больше или меньше μ' в зависимости от того, меньше или больше $\frac{1}{2}a$, т. е. в зависимости от того, находится ли точка C ближе к A или к B.

Так как деталь горизонтальна в B так же, как и в A, только что сказанное о кривой AC в точности применимо к кривой BC, если только заменить расстояние AC, обозначенное δ, на расстояние BC, которое мы обозначим δ'; так что если назовем μ'' момент упругости в точке B, получим

$$-\frac{\mu''}{\mu'} = \frac{a}{2\delta'} \qquad \text{и, следовательно,} \qquad \frac{\mu}{\mu''} = \frac{\delta'}{\delta}.$$

Отсюда следует, что если $\delta' > \delta$, следовательно $a > 2\delta$ и $a < 2\delta'$, порядок величины моментов упругости таков: $\mu > \mu' > \mu''$.

В итоге, если назвать δ меньшим из двух расстояний от точки C до точек A и B, наибольший момент упругости на всем протяжении детали равен

$$P\frac{\delta(a-\delta)^2}{a^2}.$$

137. Более частный случай: $p = 0$ и $\delta = \frac{1}{2}a$. Имеем тогда

$$\mu = \mu' = \mu'' = \frac{1}{8}Pa,$$

в то время как если бы деталь была просто оперта в A и B, наибольший момент упругости был бы в C и (121) равнялся бы

$$\frac{1}{4}Pa.$$

Чтобы получить значение стрелы прогиба f в этом случае, достаточно подставить в формулу [3] пункта 135 $p = 0$, $x = \delta = \frac{1}{2}a$ и подставить значения, которые принимают в этих предположениях силы Q и Q' согласно формулам пункта 136:

$$Q' = \frac{1}{8}P\frac{a}{a'-a} \qquad \text{и} \qquad Q = \frac{1}{8}P.\frac{4a'-3a}{a'-a};$$

находим

$$EI\,f = \frac{1}{24}P\left(\frac{a}{2}\right)^3,$$

в то время как при простом опирании имели бы

$$EI\,f = \frac{1}{6}P\left(\frac{a}{2}\right)^3.$$

Между A и C есть точка перегиба, абсциссу которой получим, подставляя предыдущие значения в правую часть уравнения [1] и приравнивая её нулю. Находим $x = \frac{1}{4} a$, как и следовало ожидать.

138. Другой частный случай: призма равномерно нагружена, $P = 0$. При этой гипотезе уравнения [7] и [8] пункта 135 сводятся к:

$$0 = \frac{pa^2}{3} - Qa + Q'(2a' - a)$$

$$0 = \frac{3\,pa^2}{8} - Qa + Q'\left(\frac{3}{2} a' - \frac{1}{2} a\right)$$

откуда $Q' = \frac{1}{12} \frac{pa^2}{a' - a}$ и $Q = \frac{1}{12} \frac{pa}{a' - a}(6a' - 5a)$.

Исходя из этих значений уравнение [1] в № 135 становится следующим:

$$\frac{EI}{\rho} = \frac{T'I}{v'} = \frac{1}{12} p\left(a^2 - 6ax + 6x^2\right) = \frac{1}{2} p\left(\left(\frac{1}{2} a - x\right)^2 - \frac{a^2}{12}\right)$$

Из этого следует:

1° Что в точке A, где $x = 0$, момент упругости равен $\frac{1}{12} pa^2$.

2° Что он уменьшается и становится равным нулю в точке перегиба, абсцисса которой дается уравнением

$$\frac{1}{2} a - x = \frac{a}{2\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0{,}211\,a\ .$$

3° Что затем становится отрицательным и растет по абсолютной величине до точки C, где через $x = \frac{1}{2} a$ становится

$$-\frac{1}{24} pa^2\ .$$

4° Что за серединой C момент упругости проходит через те же значения, что и ранее.

5° Что, следовательно, наибольшая кривизна имеет место в A.

Если бы деталь, равномерно нагруженная, была просто оперта на опорах A и B, наибольший момент упругости (121) был бы $\frac{1}{8} pa^2$ вместо $\frac{1}{12} pa^2$; он существовал бы в C, а не в A.

139. Стрелу прогиба f в рассматриваемом случае найдем, подставляя в формулу [3] пункта 135 приведенные выше значения Q и Q', одновременно с $P = 0$ и $x = \frac{1}{2} a$. Получаем, таким образом,

$$EI\,f = \frac{1}{24} p\left(\frac{a}{2}\right)^4,$$

в то время как при простом опирании имели бы (125)

$$EI\ f = \frac{5}{24}\ p \left(\frac{a}{2} \right)^4 .$$

7° Призма, опертая на три опоры B′, A, B на одном уровне, подверженная равномерно распределенной нагрузке и двум отдельным силам P′, P в промежуточных точках C′, C. фиг. 33.

140. Пусть $AB = a$, $AC = \delta$, $AB' = A'$, $AC' = \delta'$.

Назовем Q и Q' неизвестные реакции опор B, B'. Обозначим через α угол касательной в A с горизонталью AB. Получим для кривой AC в соответствии с общими формулами пункта 115:

[1] . . . . $EI\ f''(x) = \frac{1}{2}\ p\,(a-x)^2 + P\,(\delta - x) - Q\,(a-x)$

[2] . . . . $EI\left(f'(x) - \tan\alpha\right) = \frac{1}{2}\ p\left(a^2\,x - ax^2 + \frac{x^3}{3}\right) + P\left(\delta\,x - \frac{x^2}{2}\right) - Q\left(ax - \frac{x^2}{2}\right)$

[3] . . . . $EI\,(y - x\tan\alpha) = \frac{1}{2}\ p\left(\frac{a^2\,x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) + P\left(\frac{\delta\,x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - Q\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$

и для кривой CB:

[4] . . . . $EI\ f''_1(x) = \frac{1}{2}\ p\,(a-x)^2 + P\,(\delta - x) - Q\,(a-x)$

[5] . . . . $EI\left(f'_1(x) - \tan\alpha\right) = \frac{1}{2}\ p\left(a^2\,x - ax^2 + \frac{x^3}{3}\right) + P\,\frac{\delta^2}{2} - Q\left(ax - \frac{x^2}{2}\right)$

[6] . . . . $EI\,(y - x\tan\alpha) = \frac{1}{2}\ p\left(\frac{a^2\,x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) + P\,\frac{\delta^3}{6} - Q\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$

Это последнее уравнение должно удовлетворяться при $x = a$ и $y = 0$, что дает соотношение

[7] . . . . $EI\tan\alpha + \frac{1}{8}\ pa^3 + P\,\frac{\delta^2}{2}\left(1 - \frac{\delta}{3\,a}\right) - Q\,\frac{a^2}{3} = 0$

Теперь заметим, что часть $AC'B'$ призмы дала бы совершенно аналогичное уравнение, за исключением того, что $tan\ \alpha$ было бы заменено на $-tan\ \alpha$, a на a', δ, P и Q на δ', P' и Q': это дает

[8] . . . . $EI\tan\alpha + \frac{1}{8}\ pa'^3 + P'\,\frac{\delta'^2}{2}\left(1 - \frac{\delta'}{3\,a'}\right) - Q'\,\frac{a'^2}{3} = 0$.

Складывая [7] и [8], исключаем $tan\ \alpha$ и получаем одно уравнение между двумя неизвестными Q и Q'.

Другое уравнение получаем, замечая, что в силу равновесия призмы, беря моменты относительно точки A, имеем

[9] . . . . $Qa - Q'a' - p\frac{a^2}{2} + p\,a'^2 - P\,\delta + P'\,\delta' = 0$.

Неизвестные Q, Q' и $tan\ \alpha$ определяются, таким образом, тремя уравнениями первой степени, и, подставляя их значения в шесть предыдущих формул, последние дадут все обстоятельства изгиба детали.

141. Частный случай $P = 0$, $P' = 0$. Уравнения [7], [8] и [9] дают в этом случае

$$Q\,a^2 + Q'\,a'^2 = \frac{3}{8}\,p\left(a^3 + a'^3\right)$$

$$Q\,a - Q'\,a' = \frac{1}{2}\,p\left(a^2 + a'^2\right)$$

откуда, умножая второе на a'

$$Qa\,(a + a') = \frac{1}{2}\,p\left(\left(a^2 - a'^2\right)a + \frac{3}{4}\left(a^3 + a'^3\right)\right)$$

или $$Qa = \frac{1}{2}\,p\left(a'\,(a - a') + \frac{3}{4}\left(a^2 - aa' + a'^2\right)\right)$$

или $$Q = \frac{1}{8}\,p\left(3\,a + a' - \frac{a'^2}{a}\right)$$

и, меняя индексы,

$$Q' = \frac{1}{8}\,p\left(3\,a' + a - \frac{a^2}{a'}\right).$$

142. Одна из этих сил может стать отрицательной, т. е. деталь будет стремиться приподнять одну из крайних опор. Например, Q отрицательно, если имеем:

$$a'^2 - aa' > 3\,a^3 \quad \text{или} \quad \frac{a'}{a} > \frac{1}{2} + \sqrt{3{,}25} \quad \text{или} \quad \frac{a'}{a} > 2{,}303\ .$$

Пусть S — реакция опоры A; имеем

$$S + Q + Q' = p\,(a + a')$$

и, следовательно, из предыдущих формул

$$S = \frac{1}{2}\,p\,(a + a')\left\{\frac{5}{4} + \frac{(a' - a)^2}{4\,aa'}\right\}$$

Отсюда следует:

1° что промежуточная опора A всегда несет более половины общей нагрузки $p\,(a + a')$;

2° что сила S неограниченно возрастает по мере того, как одно из расстояний a, a' растет, в то время как их сумма остается постоянной.

143. В более частном случае, когда $a = a'$, имеем

$$Q = Q' = \frac{3}{8}\, pa \quad \text{и} \quad S = \frac{10}{8}\, pa\,.$$

что согласуется с результатом пункта 133, так как в этом предположении деталь горизонтальна в A. Если в формулах [7], [8], [9] пункта 140 положить

$$a = a'\,,\ \delta = \delta' = \frac{1}{2}\, a\,,\ p = 0\,,\ P = P'\,,$$

находим

$$Q = \frac{5}{16}\, P \qquad \text{и в связи} \qquad S = \frac{22}{16}\, P$$

что согласуется с результатом пункта 132.

Очевидно, что метод, примененный в пункте 140, применим к призматической детали, поддерживаемой любым числом опор, даже в случае, когда эти опоры, находясь в плоскости сил, не расположены строго по прямой линии.

8° Вертикальные игольчатые затворы, поддерживающие напор воды.

144. Пусть l — ширина иглы перпендикулярно плоскости фигуры 34, и C — её толщина в направлении давления воды. Положим $AB = a$, $AC = l$, $AD = l'$, $CM = z$.

Давление сверху (с верховой стороны) на элемент поверхности, высота которого MM' или dz, а ширина l, выражается как $\Pi\, z\,.\, ldz$, обозначая через Π вес кубического метра воды; сумма давлений с верховой стороны равна, следовательно, $\frac{1}{2}\,\Pi\, lh^2$. Точно так же сумма давлений с низовой стороны равна $\frac{1}{2}\,\Pi\, l\, h'^2$. Эти давления уравновешиваются реакциями Q, Q' опор B, A. Q получим, взяв моменты относительно A, а именно:

$$Q\, a = \int_0^h \Pi\, l\, z\, d\, z\, (l - z) - \int_0^{l'} \Pi\, l\, z\, d\, z\, (l' - z) = \frac{1}{6}\, l\, (h^3\, l'^3)$$

тогда

$$Q' = \frac{1}{2}\,\Pi\, l\, (h^2 - h'^2) - \frac{1}{6}\,\Pi\, \frac{l}{a}\, (h^3 - h'^3)$$

Теперь для любой точки между D и C, такой как M, будем иметь, рассматривая силы, действующие выше этой точки:

$$\frac{R'\, I}{v'} = Q\, (z + (a - h)) - \int_{x=0}^{x=x} \Pi\, a\, l\, d\, x\, (z - x)$$

или

$$\frac{R'\, I}{v'} = Q\, (z + (a - h)) - \frac{1}{6}\,\Pi\, l\, z^3 \ldots\ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

Точка наибольшей кривизны между C и D получается приравниванием нулю производной правой части:

$$0 = Q - \frac{1}{2}\,\Pi\, l\, z^2\,,\ 0 = \frac{1}{6}\,\Pi\, \frac{l}{a}\, (h^3 - l'^3) - \frac{1}{2}\,\Pi\, l\, z^2\,, \qquad \text{откуда} \qquad z = \sqrt{\frac{h^3 - h'^3}{3\, a}}$$

Это значение применимо к вопросу только в том случае, если оно окажется меньше $CD = h - h'$. Если это условие выполнено, получим выражение наибольшего момента упругости, подставляя найденное значение z в предыдущую формулу [1].

В противном случае нужно искать точку наибольшего изгиба между A и D.

Пусть y — расстояние Am' некоторой точки кривой AD от точки A. Равновесие этой части под действием вычисленной выше силы Q' и давлений с верховой и низовой сторон даст

$$\frac{R' I}{v'} = Q' y - \Pi (h - h') l y . y^2 ,$$

и максимум изгиба будет соответствовать уравнению

$$Q' - \Pi (h - h') l y = 0 ,$$

откуда

$$y = \frac{h + h'}{2} - \frac{h^3 - h'^3}{6 a (h - h')} \qquad \text{и} \qquad \frac{R' I}{v'} = \frac{Q' y}{2} ;$$

и, наконец, исключая Q' и y, получаем выражение максимума момента упругости между A и B, а именно:

$$\frac{R' I}{v'} = \frac{\Pi l (h - h')}{2} \left(\frac{h + h'}{2} - \frac{h^3 - h'^3}{6 a (h - h')} \right)^2 ,$$

которое будет применимо только в том случае, если предыдущее значение y меньше h'.

145. Можно избежать интегрирований, впрочем, очень легких из предыдущего пункта, с помощью известного геометрического построения, в котором давление воды на плоскость представляется призмой, центр тяжести которой соответствует центру давления.

146. Предположим теперь, что вертикальные иглы, поддерживающие напор воды, опираются на три горизонтальные и равноотстоящие поперечины A, B, C (фиг. 35). Уровень верховой воды достигает верхней опоры C, и низовой воды нет. Требуется найти давления Q, S, Q', оказываемые опорами C, B, A.

Пусть $AB = BC = a$ и $CM = x$. В произвольной точке m кривой CB, принимая размер, перпендикулярный фигуре, равным единице длины, имеем

$$EI f''(x) = \frac{1}{6} \Pi x^3 - Q x$$

Интегрируя, получаем

$$EI f'(x) = C + \frac{1}{24} \Pi x^4 - \frac{1}{2} Q x^2 .$$

При $x = a$, $f'(x) = \tan \alpha$, наклон кривой в B.

Таким образом, $$EI \tan \alpha = C + \frac{1}{24} \Pi a^4 - \frac{1}{2} Q a^2 .$$

Следовательно, $$EI\left(f'(x)-\tan\alpha\right)=-\frac{1}{24}\,\Pi\left(a^4-x^4\right)+\frac{1}{2}\,Q\left(a^2-x^2\right)\ .$$

Интегрируя снова, учитывая, что x и y одновременно равны нулю, получаем

$$EI\,(y-x\tan\alpha)=-\frac{\Pi}{30}\,a^4+\frac{1}{3}\,Q\,a^2\ \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ [\,1\,]$$

Теперь в произвольной точке m' кривой AB, если взять начало координат в A и, следовательно, $Am'=x'$, имеем

$$EI\,f''_1(x')=\Pi\,a\,x'^2-\frac{1}{6}\,\Pi\,x'^3-Q'\,x'$$

что видно, представляя давление на Am' как прямоугольник $ADEm'$ минус треугольник DEF. Интегрирование дает

$$EI\,f'_1(x')=\Pi\left(\frac{1}{3}\,a\,x'^3-\frac{1}{24}\,x'^4\right)-\frac{1}{2}\,Q'\,x'^2+C\ .$$

При $x'=a$ имеем $f'_1(x')=-\tan\alpha$; следовательно, исключая C,

$$EI\left(f'_1(x')+\tan\alpha\right)=-\Pi\left(\frac{a}{3}\left(a^3-x'^3\right)-\frac{1}{24}\left(a^4-x'^4\right)\right)+\frac{1}{2}\,Q'\left(a^2-x'^2\right)\ .$$

Интеграл этого уравнения, учитывая, что одновременно $x'=0$ и $y'=0$, есть

$$EI\,(y'+x'\tan\alpha)=-\Pi\left(\frac{a}{3}\left(a^3\,x'-\frac{x'^4}{4}\right)-\frac{1}{24}\left(a^4\,x'-\frac{x'^5}{5}\right)\right)+\frac{1}{2}\,Q'\left(a^2\,x-\frac{x'^3}{3}\right)\ .$$

y должно также стать нулем при $x'=a$, что дает

$$EI\tan\alpha=-\Pi\,\frac{13}{60}\,a^4+\frac{1}{3}\,Q'\,a^2\ \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ [\,2\,]$$

Исключая $tan\ \alpha$ из двух уравнений, получим

$$Q+Q'=\frac{3}{4}\,\Pi\,a^2\ .$$

Кроме того, имеем полное давление опор

$$Q+Q'+S=2\,\Pi\,a^2\ .$$

И, беря моменты всех сил относительно B, находим

$$(Q-Q')\,a=2\,\Pi\,a^{2.}\,\frac{a}{3}\qquad\text{или}\qquad Q'-Q=\frac{2}{3}\,\Pi\,a^2\ .$$

Таким образом, имеем три очень простых уравнения между тремя силами Q, Q' и S. Если обозначить через P полное давление воды $2\,\Pi\,a^2$, получим

$$Q'=\frac{17}{48}\,P\ ,\qquad Q=\frac{1}{48}\,P\ ,\qquad S=\frac{30}{48}\,P\ .$$

Зная усилия, воспринимаемые деталями *A, B, C,* можно определить подходящие для них размеры (123). Можно было бы поставить и решить вопрос о том, на каком расстоянии опора *B* должна находиться позади вертикали *AC*, чтобы нагрузки *S* и *Q* были равны.

§: 5. Экспериментальные данные и приложения.

147. Мы извлекаем приведенные ниже таблицы из интересного и очень полезного труда, озаглавленного *Теоретические и экспериментальные исследования по устройству большепролетных деревянных конструкций* г-на Ардана, офицера инженерных войск, отсылая, как это делает он сам, к известным трудам гг. Навье, Понселе и Морена.

Последние четыре столбца второй таблицы относятся к призмам большой длины, сжимаемым вдоль этой длины. Известные теории по этому вопросу относятся только к очень тонким призмам и не применимы к деталям, используемым в строительстве.

I *Таблица сопротивления тел растяжению*

Обозначение веществ	Коэффициент упругости E деленный на 1 000 000	Натяжение на квадратный миллиметр вызывающее разрыв	*R*, деленное на 1 000 000 или предел постоянных усилий на квадратный миллиметр
Древесина дуба	1,200 К	6 К	0,50 à 0,70 К
Древесина ели	1,300	8	0,60 à 0,80
Арки из каркасных досок	500	3	0,25 à 0,30
Железная проволока в кабелях	18,000	30	6 à 10 } в зависимости
Кованое железо сечением бол. 0,06м	18,000	40	4 à 8 } от
Кованое железо сечением мен. 0,06м	20,000	60	6 à 10 } качества
Серый чугун не подверженный ударам	12,000	12.5	7,5

II *Таблица сопротивления раздавливанию*

Обозначение веществ	Вес куб. метра	Вес, вызывающий раздавливание кубика 0,01 м стороны	Предел постоянных нагрузок на кв. мм, при отношении длины к малой стороне основания, равном				
			< 12	12	24	48	60
Дуб крепкий	980Кг	300Кг	0,3Кг	0,25	0,15	0,05	0,025
Дуб слабый	900	190	0,19	0,084	0,056	"	"
Сосна желтая или красная	671	375	0,375	0,31	0,187	0,075	"

Сосна белая	550	97	0,097	0,082	0,049	"	"
Кованое железо . . .	7,783	4.900	10,	8,35	5,	1,67	0,84
Чугун	7,202	10.000	20,	16,70	10,	3,33	1,67

148. Дубовая деталь, горизонтально заделанная одним концом, нагружена на другом конце грузом P; её выступающая длина равна a, её поперечное сечение в обтёсанном виде имеет ширину b и высоту C. Определить практический максимум P с учетом собственного веса детали, который составляет $П$ на кубический метр. Формулы (117 и 102):

$$\frac{R'\,I}{v}{}' = \left(\frac{1}{2}\,pa + P\right)a\,, \qquad I = \frac{1}{12}\,lc^3\,,$$

в которых надо взять $\mathrm{v}' = \frac{1}{2}\,C\,, \qquad pa = \Pi\,a\,l\,c\,,$

Таким образом, $$P + \frac{1}{2}\,\Pi\,abc = \frac{1}{6}\,\frac{b\,c^2}{a}\,R'$$

где можно принять $R' = 0{,}6 \times 10^6$

и приблизительно $\Pi = 900$.

Если требуется высота, на которую опускается свободный конец, имеем (119):

$$h = \frac{1}{E\,I}\left(\frac{p\,a}{8} + \frac{P}{3}\right)a^3 = \frac{12\,a^3}{b\,c^3\,E}\left(\frac{\Pi\,abc}{8} + \frac{P}{3}\right),$$

и нужно взять $E = 1200$ x 10^6.

149. Если отверстие перекрывается горизонтальными брусьями, полное падение равно H, расстояние между опорами a; определить толщину C брусьев. Те из них, которые находятся ниже уровня низовой воды, несут нагрузку, обусловленную высотой H. Формула, полагая $P = 0$ и $R' = R$, является формулой пункта 121:

$$\frac{R_1\,I}{V'} = \frac{1}{8}\,p\,a^2\,.$$

Называя h вертикальный размер бруса и $П$ вес кубического метра воды, имеем

$$p\,a = \Pi\,H\,ab \;\; ; \qquad I = \frac{1}{12}\,b\,c^3 \qquad \text{и} \qquad v' = \frac{1}{2}\,C\,.$$

Таким образом, приведенная выше формула становится

$$\frac{1}{6}\,R_1\,b\,c^2 = \frac{1}{8}\,\Pi\,H\,a^2\,b \qquad \text{откуда} \qquad C^2 = \frac{3}{4}\,\frac{\Pi\,H\,a^2}{R_1}\,.$$

Если брусья дубовые, можно, насколько возможно, уменьшить их сечение, принимая $R_1 = 0{,}8$ x 10^6; если они сосновые, принимают $R_1 = 0{,}9$ x 10^6.

§: 6. Тела равного сопротивления.

150. Когда тело имеет большую длину по сравнению с его поперечными размерами, но последние изменяются, а не остаются постоянными, как мы предполагали в §: 2 и далее, если это изменение происходит постепенно, можно представить длину разделенной на несколько частей, для каждой из которых деталь мало отличается от призмы. Следовательно, если рассмотреть сечение $\alpha\, a'$ (фиг. 16), за которым деталь подвержена силам, приблизительно параллельным этому сечению, можно допустить, что уравнение $\sum M\{F\}_0 = \sum M\{A\}_0$ все еще имеет место, и что момент упругости $\sum M\{A\}_0$ может все еще выражаться как

$$\frac{R'I}{V'} \quad \text{или} \quad EI\int''(x)\ ,$$

как в пунктах 99 и 101, называя I моментом инерции сечения $\alpha\, a'$ относительно оси o, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной направлению сил F, и обозначая через $f(x)$ величину смещения любой точки прямой или слабо изогнутой линии, проходящей через центры тяжести поперечных сечений.

151. Рассмотрим случай, когда деталь переменного сечения и малой кривизны приблизительно горизонтальна, удерживается в этом положении в A на одном из своих концов опорами и нагружена на другом конце B единственной вертикальной силой P, так что собственным весом детали здесь пренебрегаем. Если положить, фиг. 36, $AB = a$ и $AM = x$, то в M имеем:

$$\frac{R'I}{V'} = P(a-x)\ ,$$

уравнение, которое отличается от того, которое было бы для призмы, тем, что I и v' переменны. Предположим, например, что все поперечные сечения детали прямоугольны, так что ширина b, перпендикулярная плоскости чертежа, постоянна, в то время как высота a a' переменна и обозначена z. Тогда имеем (102) . . . . . $I = \frac{1}{12} b z^3$ и $V' = \frac{1}{2} z$. Предыдущее уравнение становится:

$$\frac{R' b z^2}{6} = P(a-x)\ ,$$

и можно изменять z таким образом, чтобы максимум сопротивления R' сечения, соответствующего абсциссе x, был постоянен на всем протяжении AB. Деталь тогда называется телом равного сопротивления относительно силы, действующей как P на конце B. Для этого нужно, чтобы z^2 было пропорционально $a - x$, так что если линия $A\ M\ B$ центров тяжести прямая в естественном состоянии, кривая $a\ B\ a'$, переменная ордината которой $M\ a$ равна $\frac{1}{2} z$, является параболой второй степени с вершиной в B. Можно, не изменяя свойства тела, располагать одной из кривых $a\ B$, $a'\ B$, лишь бы она мало отличалась от прямой.

152. Если бы поперечное сечение было круглым с переменным радиусом z, имели бы (110): $I = \frac{1}{4} \Pi R' z^4$ и $V' = z$, откуда

$$\frac{1}{4} \Pi R' z^3 = P (a - x)$$

уравнение меридиональной кривой детали, предполагаемой телом вращения.

В обеих предыдущих гипотезах, если бы требовалось определить наименьшие поперечные размеры, соответствующие заданной силе P, следовало бы придать R' его максимальное значение R, зависящее от материала тела.

153. Если деталь, удерживаемая горизонтально в A, несет от A до B равномерно распределенную нагрузку pa, то в произвольной точке M имеем

$$\frac{R' I}{V'} = \frac{1}{2} p (a - x)^2 .$$

Пусть, как в пункте 151, $I = \frac{1}{12} h z^3$ и $V' = \frac{1}{2} z$,

откуда $$\frac{1}{6} R' h z^2 = \frac{1}{2} p (a - x)^2$$

Тело будет равного сопротивления относительно этого распределения нагрузки, если z пропорционально $a - x$; следовательно, если средняя линия AMB прямая, линии aB, $a'B$ также будут прямыми, сходящимися в B.

§: 7. Призмы, подверженные силам произвольных направлений.

154. Пусть деталь, часть которой $a\ a'\ B$ (фиг. 37), естественно прямая или изогнутая, слабо деформирована действием одной или нескольких сил. Назовем еще A различные реакции, нормальные к плоскости aa', и предположим, что равнодействующая других произвольных сил, приложенных к детали, разложена на две силы: одну N, нормальную к aa', и другую, параллельную этому же сечению. Пусть a — расстояние от P до этой плоскости, и y — расстояние от N до центра тяжести G сечения aa'.

Различные силы A и две силы P и Q удовлетворяют двум уравнениям:

$$\sum A = N \qquad \text{и} \qquad \sum M \{A\}_6 = P a + N y ,$$

так как можно взять за ось моментов любую прямую в плоскости aa', и, следовательно, ось G, хотя неизменное волокно в этом случае больше не проходит через центр тяжести, как будет видно.

Поскольку скольжение сечения bb', очень близкого к aa', можно считать нулевым, мы все еще допускаем, что каждая сила A для элемента $d\omega$ пропорциональна расстоянию этого элемента до прямой, проецируемой в 0, где нормальная реакция равна нулю. Таким образом, обозначив через V расстояние OG, а через γ, как и ранее, расстояние от элемента $d\omega$ до линии G, мы получим :

$$A = \varphi (\gamma + V)\, d\omega \qquad \text{откуда} \qquad \sum A = \varphi V \Omega \qquad \text{из-за} \qquad \sum \gamma\, d\omega = 0 ,$$

итак имеем $\varphi\, V\, \Omega = N$ . . . . . [1]

и V равно нулю только тогда, когда N равно нулю.

Теперь момент одной из сил A относительно G равен $A\,\gamma$ или $\varphi\,(\gamma + V)\,\gamma\, d\,\omega$;

следовательно,

$$\sum M\,\{A\}_G = \varphi \sum \gamma^2\, d\,\omega \quad \text{(поскольку } \varphi\, V \sum \gamma\, d\,\omega = 0\text{).}$$

Таким образом, для момента упругости относительно оси G имеем то же выражение, что и когда неизменное волокно проходит через эту ось, а именно:

$$\sum M\,\{A\}_G = \varphi\, I\ .$$

Следовательно, уравнение моментов становится

$$\varphi\, I = P\, a + N\, y \ . . . . . [2]$$

Наконец, величина φ, называя, как всегда, R' сопротивление на единицу поверхности в точке, находящейся на расстоянии γ' от центра тяжести, удовлетворяет соотношению

$$R'\, d\,\omega = \varphi\,(\gamma' + V)\, d\,\omega\ ,$$

откуда $$\varphi = \frac{R'}{\gamma' + V} \ . . . . . [3]\ ;$$

так что если предположить заданными величины $P,\ N,\ a,\ y,\ \Omega,\ I$ и γ', имеем три уравнения для трех неизвестных $V,\ \varphi,\ R'$. Из них заключаем:

$$\varphi = \frac{P\, a + N\, y}{I} \ . . [4] \quad V = \frac{N\, I}{\left(P\, a + N\, y\right)\Omega} \ . . [5] \quad R' = \frac{\left(P\, a + N\, y\right)\gamma'}{I} + \frac{N}{\Omega} \ . . . [6]$$

Можно в [4] заменить φ, как и ранее, на $\frac{E}{\varsigma}$, называя ς расстояние, на котором встречаются два бесконечно близких сечения, которые в естественном состоянии были бы параллельны. Таким образом, изменение кривизны или изгиб детали в сторону сечения aa' зависит только от момента равнодействующей сил P и N относительно G, каково бы ни было направление этой равнодействующей.

Но уравнение [6] показывает, что не так обстоит дело с сопротивлением R', которое оказывается состоящим из двух частей: одной, обусловленной моментом $P\ a\ +\ N\ y$, и другой, обусловленной вертикальной составляющей. Это то, что Навье сформулировал (стр. 248 его лекций), не доказывая этого. (23)

155. Частный случай: вертикальная призма, нагруженная грузом, действующим на некотором расстоянии от оси этой детали. Назовем (фиг. 38):

a — высота OA призмы, вертикально заделанной в O;

l — расстояние BC между концом B и точкой C приложения груза N;

f — стрела прогиба AB, вызванная этим грузом;

$y,\ x$ — координаты точки M изогнутой оси относительно осей $0y$ (горизонтальной) и $0x$ (вертикальной).

Если пренебречь собственным весом детали, момент упругости в M равен моменту N относительно центра тяжести M (154), и имеем

$$E\,I\,f''(x) = N\left(l + f - y\right).$$

Чтобы проинтегрировать это уравнение, запишем его в виде

$$\frac{d\,p}{d\,x} = K\,(b - y)\,;$$

полагая $$p = \frac{d\,y}{d\,x}$$

Отсюда, умножая на $$p\,d\,p = K\,(b - y)\,d\,y$$

Интегрируя $$p^2 = K\left(2\,b\,y - y^2\right)$$

без константы, поскольку p и y равны нулю одновременно.

Последнее уравнение становится

$$\sqrt{K}\,d\,x = \frac{d\,y}{\sqrt{2\,b\,y - y^2}} \qquad \text{или} \qquad \sqrt{K}\,d\,x = \frac{d\,y}{\sqrt{b^2 - (b - y)^2}}$$

откуда, интегрируя: $$x\,\sqrt{K} = arc\left(\cos 1 - \frac{y}{b}\right).$$

без какой-либо другой константы, поскольку y и x равны нулю одновременно. Это уравнение сводится к следующему

$$1 - \frac{y}{b} = \cos x\,\sqrt{K} \qquad \text{или} \qquad y = (l + f)\left(1 - \cos x\sqrt{\frac{N}{E\,I}}\right).$$

Теперь при $x = a$, y становится f. Отсюда заключаем:

$$f = l\left(\frac{1}{\cos a\sqrt{\frac{N}{E\,I}}}\right) - 1 \quad \ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

формула, в которой легко увидеть, что $a\sqrt{\frac{N}{E\,I}}$ – абстрактное число.

Зная f, применим формулу [6] предыдущего пункта, полагая:

$$R' = N\,(l + f)\,\frac{V'}{I} + \frac{N}{\Omega} \quad \ldots\ldots\ldots [\,2\,]$$

Если единственными неизвестными были f и R', их можно определить непосредственно; но если бы речь шла об определении сечения детали так, чтобы при заданных a, P и l сопротивление R' не превышало заданного предела, неизвестную было бы труднее выделить, потому что она входит в угол $a\sqrt{\frac{N}{E\,I}}$. В этом случае заметим, что этот угол мал, так как отношение $\frac{f}{l}$ равный $\frac{1}{\cos\sqrt{\frac{P}{E}}} - 1$ – мало, и, следовательно, косинус мало отличается от 1. Для малой дуги, которую можно отождествить с её хордой, имеем приближенно

$$(arc)^2 = 2\,(1 - cosinus)\,,$$

откуда $$\cos = 1 - \frac{1}{2}\,(arc)^2\,.$$

Поэтому формула [1] может быть заменена на:

$$f = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\,\frac{a^2\,N}{E\,I}} - 1 \right) l \qquad \ldots\ldots\ldots [\,3\,]$$

и, следовательно, уравнение [2] дает

$$R' = \frac{N\,\gamma'\,l}{I}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\,\frac{a^2\,N}{E\,I}} + \frac{N}{\Omega} \qquad \ldots\ldots [\,4\,]$$

Если сечение прямоугольное, имеем $\Omega = bc$, $I = \frac{1}{12}\,bc^3$ и $V' = \frac{1}{2}\,c$; если круглое, $\Omega = \Pi\,r^2$, $I = \frac{\Pi\,r^2}{4}$ и $V' = r$.

Таким образом, уравнение [2] становится:

для прямоугольной призмы: $$bc^2 = \frac{N}{R'}\left(c + \frac{6\,l}{1 - \frac{6\,N\,a^2}{E\,b\,c^3}} \right)$$

для цилиндра: $$r^2 = \frac{N}{\Pi\,R^2}\left(r + \frac{4\,l}{1 - \frac{2\,N\,a^2}{E\,\Pi\,r^4}} \right).$$

Пример, взятый из цитированного труда г-на Ардана (стр. 105). Сосновый цилиндр: $a = 15м;\ l = 1;\ N = 5000\ Кг;\ R' = 6 \times 10^5;\ E = 12 \times 10^8$. Находим диаметр $2r = 0{,}49м$ и стрелу $f = 0{,}166$. Было бы точнее учесть собственный вес p детали, записав $\frac{N + pa}{\Omega}$ для последнего члена формулы [4] вместо $\frac{N}{\Omega}$, что сводится к пренебрежению влиянием $p\ a$ на изгиб детали.

156. Можно получить более простым способом достаточно приближенное решение предыдущей задачи, пренебрегая разностью $f - y$ в первом уравнении и полагая

$$E\,I\,f''(x) = N\,l \qquad \text{откуда} \qquad E\,I\,f'(x) = N\,l\,x \qquad \text{и} \qquad E\,I\,y = \frac{1}{2}\,N\,l\,x^2$$

и, следовательно, стрелка $$f = \frac{1}{2}\,\frac{N\,l\,a^2}{E\,I}$$

подставляя P и f вместо N и y в уравнение [6] пункта 154:

$$R'\,\Omega = N\,(l + f)\,\frac{V'\,\Omega}{I} + N \qquad \text{или} \qquad R' = \frac{N\,v'\,l}{I}\left(1 + \frac{N\,l\,a^2}{2\,E\,I} \right) + \frac{N}{\Omega}\,.$$

Получили бы те же результаты из уравнений [3] и [4] выше, заменяя дробь $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\,\frac{a^2\,N}{E\,I}}$ на $1 + \frac{1}{2}\,\frac{a^2\,N}{E\,I}$, которая очень мало отличается от неё, так как стрела всегда очень мала по сравнению с l.

157. Если бы видоизменить задачу пункта 155, добавив силу P, параллельную BC, уравнение для изгиба было бы

$$E\,I\,f''(x) = P\,(a-x) + N\,(l+f-y) \quad \ldots\ldots [\,1\,]$$

Это уравнение интегрируется, замечая, с одной стороны, что если заменить $a - x$ на $-x'$ и $l + f - y$ на y', это уравнение становится

$$E\,I\,\frac{d^2\,y'}{d\,x^2} = -\,P\,x' - N\,y'\,.$$

С другой стороны, функция вида $y = A\,x + B\sin C\,x + D\cos C\,x$ дает

$$\frac{d\,y}{d\,x} = A + C\,B\cos C\,x\,C\,D\sin C\,x$$

и

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} - C^2\,B\sin C\,x - C^2\,D\cos C\,x = C^2\,A\,x - C^2\,y\,,$$

что становится тождественным приведенному выше уравнению относительно y' и x', если положить

$$C^2\,A = \frac{P}{E\,I} \qquad \text{и} \qquad C^2 = \frac{+N}{E\,I} \qquad \text{откуда} \qquad A = -\,\frac{P}{N}$$

Общий интеграл, следовательно:

$$y' = -\,\frac{P}{N}\,x' + B\sin x'\sqrt{\frac{N}{E\,I}} + D\cos x'\sqrt{\frac{N}{E\,I}}\,,$$

и две постоянные B, D определяются условием, что при $x = 0$ имеем $y = 0$ и $\frac{d\,y}{d\,x} = 0$.

Вместо того чтобы продолжать это вычисление, по которому можно обратиться к лекциям Навье, заметим, что уравнение [1] упростилось бы, пренебрегая, как в пункте 156, разностью $f - y$. Получили бы приближенно

$$E\,I\,f''(x) = P\,(a-x) + N\,l\,,$$

интеграл $E\,I\,y = (P\,a + N\,l)\,\frac{x^2}{2} - \frac{P\,x^3}{6}$ которого дает при $x = a$ стрелу f

$$f = \frac{1}{E\,I}\left(\frac{N\,l\,a^2}{2} + \frac{P\,a^3}{3}\right),$$

значение, которое нужно подставить в следующую формулу, согласующуюся с уравнением [6] пункта 154

$$R' = \left(P\,a + N\,(l+f)\right)\frac{V'}{I} + \frac{N}{\Omega}\,,$$

чтобы определить либо предельное сопротивление R', либо поперечные размеры детали, если это сопротивление задано.

§: 8. Изгиб и сопротивление криволинейных деталей.

158. Для естественно изогнутой детали, подверженной известным внешним силам, можно поставить два вопроса: 1° Определить изменение формы детали. 2° Определить предельное сопротивление R' в заданном сечении. Если бы интенсивности сил и их положения относительно этого сечения были известны, формула [6] пункта 154 дала бы непосредственное решение второго вопроса. Мы займемся первым в случае, когда силы расположены в плоскости первоначальной кривой детали, предполагаемой вертикальной (фиг. 39). Пусть aa' — некоторое поперечное сечение, а bb' — другое бесконечно близкое сечение в естественном состоянии. Предположим, что в состоянии изгиба это второе сечение занимает, относительно первого, положение $b_1\, b'_1$; в результате элементарное волокно, имевшее естественную длину mm', претерпело изменение $m'm_1$, и, следовательно, сила A, соответствующая этому волокну, равна $A = E\, d\, \omega \frac{m'm_1}{m\,m'}$.

Назовем α и $\alpha + d\alpha$ углы, которые сечения aa', bb' составляют с вертикалью в состоянии изгиба; обозначим через $d\delta$ длину oo', предполагаемую неизменной. Имеем, полагая $om = z$:

в естественном состоянии: $m\,m' = d\,\delta - z\, d\,\alpha$

в состоянии изгиба: $m\,m_1 = d\,\delta - z\, d\,\alpha'$

или пренебрегая $z\, d\,\alpha$ по сравнению с $d\delta$, учитывая небольшую кривизну детали

$$A = E\, d\,\omega \frac{z\,(d\,\alpha' - d\,\alpha)}{d\,\delta}$$

Теперь, называя v, как и ранее, расстоянием от элемента $d\,\omega$ до проекции G центра тяжести и обозначая V расстоянием $0G$, имеем $z = v \pm V$ и:

$$\sum M\,\{A\}_G = \sum AV = \frac{E\,(d\,\alpha' - d\,\alpha)}{d\,\delta} \sum v^2\, d\,\omega$$

так как $V \sum v\, d\,\omega = 0$. Обозначая обыкновенно через I момент инерции сечения aa' относительно оси G, эта формула становится;

$$\sum M\,\{A\}_G = E\, I\, \frac{d\,\alpha' - d\,\alpha}{d\,\delta}.$$

Приняв это, обозначая через F одну из произвольных сил, действующих на деталь от сечения aa' до её конца, получим, беря моменты всех сил F относительно оси G:

$$\frac{d\,\alpha' - d\,\alpha}{d\,\delta} = \frac{1}{E\,I} \sum M\,\{F\}_G.$$

Правая часть этого уравнения может рассматриваться как неявная или явная функция δ, в которой силы входят как постоянные или как функции δ. Моменты этих сил относительно точки G на конце дуги δ следовало бы брать в состоянии изгиба детали; но так как этот изгиб очень мал, можно без заметной ошибки вычислять моменты сил по их положениям в естественном состоянии детали.

Умножая обе части уравнения на $d\delta$ и интегрируя, получим

$$(\alpha' - \alpha) = \frac{\int_0^{\delta} d\,\delta \sum M\{F\}_G}{E\,I},$$

интеграл берется до точки G — конца произвольной дуги δ, начиная от начала, где направление кривой предполагается одинаковым в состоянии изгиба и в естественном состоянии. Таким образом, получаем изменение $\alpha' - \alpha$ угла нормали на конце дуги δ с вертикалью вследствие изгиба.

Чтобы перейти от этого первого результата к определению изменения положения точки G, мы используем следующую уловку Навье, заметив, что приведенный выше Интеграл можно рассматривать либо как функцию от δ, либо как функцию от x, которую мы будем обозначать для краткости по $F(x)$, называя x и y горизонтальными и вертикальными координатами точки G в естественном состоянии; таким образом, $\alpha' - \alpha = F(x)$.

Угол $\alpha' - \alpha$ очень мал, поэтому можно приближенно записать:

$$\sin(\alpha' - \alpha) = \alpha' - \alpha, \quad \text{и} \quad \cos(\alpha' - \alpha) = 1.$$

Тогда, рассматривая α' как $(\alpha' - \alpha) + \alpha$, имеем:

$$\cos\alpha' = \cos(\alpha' - \alpha)\cos\alpha - \sin(\alpha' - \alpha)\sin\alpha$$
$$\sin\alpha' = \sin(\alpha' - \alpha)\cos\alpha + \cos(\alpha' - \alpha)\sin\alpha$$

Но если обозначить через x', y' координаты в состоянии изгиба той же точки G, координаты которой в естественном состоянии суть x, y, то

$$\cos\alpha' = \frac{d\,x'}{d\,\delta} \text{ и } \sin\alpha' = \frac{d\,y'}{d} \text{ подобно } \cos\alpha = \frac{d\,x}{d\,\delta} \text{ и } \sin\alpha = \frac{d\,y}{d\,\delta}$$

делаем вывод

$$d\,x' - d\,x = -d\,y\,F(x) \quad \text{и} \quad d\,y' - d\,y = d\,x\,F(x)$$

и интегрируя:

$$x' - x = -\int_0^x d\,y\,F(x) \quad \text{и} \quad y' - y = \int_0^x d\,x\,F(x);$$

таким образом, смещения точки G — горизонтальное $x' - x$ и вертикальное $y' - y$ — определяются двумя квадратурами, так как, если задана первоначальная кривая, y является функцией x, например $y = f(x)$, и имеем $d\,y = f'(x).\,d\,x$. Эта производная $f'(x)$ выражает переменную $\tan\alpha$.

159. Замечание и приближенный метод. Величина $\sum M\{F\}_G$ может не выражаться общей функцией δ. Но всегда можно представить графически интеграл $\frac{\int_0^{\delta} d\,\delta \sum M\{F\}_G}{E\,I}$ площадью кривой, откладывая по оси абсцисс длины δ от начала криволинейной детали до различных точек G, а по оси ординат — частные, полученные делением на E I моментов сил, действующих за последовательными точками G, относительно этих же

точек. Для дальнейшего вычисления лучше брать в качестве абсцисс последовательные значения x; для этого подставим $d\,\delta = \frac{d\,x}{\cos\alpha}$ и будем откладывать, следовательно, по оси ординат значения

$$\frac{\sum M\{F\}_G}{E\,I\cos\alpha}.$$

Площади под этой кривой, отсчитываемые от начала, будут значениями *F(x)*. Вычислим эти значения численно, затем представим их графически отрезками, которые отложим по оси ординат на концах абсцисс x. В результате получим новую кривую, площадь под которой для любой абсциссы x будет соответствующим значением

$$\int_0^x d\,x\,F(x) \quad \text{или} \quad (y' - y).$$

Наконец, те же значения *F(x)*, умноженные на соответствующие значения $\frac{d\,y}{d\,x}$ или *tan* α, и полученные произведения, снова отложенные по оси ординат на концах абсцисс x, дадут третью кривую, площадь под которой для абсциссы x будет соответствующим значением

$$\int_0^x x\,.\,tang\,\alpha\,F(x) \quad \text{или} \quad \int_0^x d\,y\,F(x) \quad \text{или} \quad (x' - x).$$

Если бы поперечное сечение детали было постоянным, следовало бы вынести делитель $E\,I$ за знак $\int$ и соответствующим образом изменить предыдущие указания. В любом случае видно, что вычисление, возможно, длинное, но несложное, даст средство определить вертикальные и горизонтальные перемещения различных точек заданной криволинейной детали, подверженной заданным силам.

160. Практика инженерного искусства представляет случаи, когда некоторые из сил, действующих на криволинейные детали, должны быть определены расчетом; например, арка, которая в естественном состоянии имеет известную длину хорды, опирается на две опоры на одном уровне, которые делают эту хорду неизменной, в то время как арка подвержена заданным вертикальным нагрузкам: чтобы убедиться, выдержит ли эта деталь соответствующие усилия, необходимо предварительно вычислить реакции опор; их вертикальные составляющие известны непосредственно, но их горизонтальные составляющие должны быть выведены из условия неизменности хорды; и этого всегда можно достичь методом проб, который легко найти на основе вышеизложенного.

161. *Частные случаи*. Может случиться, что криволинейная деталь, подверженная внешним силам, тем не менее сохраняет ту же форму, которую она имела бы в естественном состоянии, за исключением очень малозаметного эффекта удлинения или укорочения средней линии. Для этого необходимо и достаточно, чтобы если разделить деталь на две части любым сечением, алгебраическая сумма моментов сил, приложенных к одной из этих частей, относительно центра тяжести G этого сечения была равна нулю. Равнодействующая этих же сил, проходящая через точку G, есть

давление или натяжение в рассматриваемом сечении. Это соображение имеет место, когда арка, имеющая форму цепной линии, несет параллельные нагрузки, равномерно распределенные по её длине, и крайние точки получают силы, касательные к кривой. Оно также удовлетворяется, когда арка, имеющая форму параболы с вертикальной главной осью, несет вертикальные нагрузки, равномерно распределенные по горизонтальной проекции этой арки, и крайние силы касательны к кривой. В этом случае применимы формулы, относящиеся к висячим мостам (пункты 51 и след.), и уравнение кривой, будучи $y = a\,x^2$, если обозначить через Tx горизонтальный распор, а через p нагрузку на единицу горизонтальной длины, имеем $T_x = \frac{p}{2\,\alpha}$.(*) Следовательно, когда речь идет об арке, горизонтальная хорда которой равна $2c$, а стрела равна h, имеем $h = \alpha\,c^2$,

откуда $$T_x = \frac{p\,c^2}{2\,h}$$

— горизонтальная составляющая сопротивления каждой опоры, в то время как её вертикальная составляющая равна

$$T_y = p\,c\,,$$

и, следовательно, полное сопротивление $\sqrt{T_x^2 + T_y^2} = \frac{p\,c^2}{2\,h}\sqrt{1 + \frac{4\,h^2}{c^2}}$.

Эти результаты применимы к кривым в виде дуг окружности, стрела которых мала по сравнению с хордой. Г-н Ардан, используя анализ Навье, находит для этого случая (стр. 120 цитированного труда) для горизонтального распора формулу, которая сводится к

$$T_x = \frac{p\left(c^2 + h^2\right)}{2\,h}$$

и дает, следовательно, немного большее значение, чем приведенное выше выражение, относящееся к параболической кривой.

По предмету этого параграфа можно найти научные и полезные подробности в уроках г-на Навье и в исследованиях г-на Ардана.

§: 9. Кручение призм

162. Призма, неизменно закрепленная одним из своих концов и нагруженная на другом конце различными силами, эквивалентными паре, лежащей в поперечном сечении, требует для устанавливающегося равновесия, чтобы каждое сечение aa' оказывало на соседнее bb' силы, приводимые к паре, параллельной первой и имеющей тот же момент.

(*) Эту формулу очень легко найти, рассмотрев равновесие участка дуги от вершины, где касательная горизонтальна ; вертикальные силы дают $T_y = px$, а уравнение моментов $T_y\,.\,x = T_x\,y + \frac{1}{2}\,p\,x^2$ относительно начала координат abc, из которого, исключая T_y, мы заключаем $y\,T_x = \frac{1}{2}\,p\,x^2$ или $\alpha\,T_x = \frac{1}{2}\,p$.

Эти силы возникают в результате смещения одного из этих сечений относительно другого, смещения, которое состоит во вращательном движении вокруг внутренней оси призмы.

Пусть Θ — угол закручивания детали на единицу длины;

$d\omega$ — общая площадь двух элементарных поверхностей, которые в естественном состоянии находились бы друг против друга в плоскостях aa', bb';

r — их расстояние до оси, которое не изменяется при кручении.

Наблюдаемым явлениям удовлетворяет допущение, что элемент $d\omega$ плоскости bb' стремится вернуться в своё естественное положение под действием силы, перпендикулярной радиусу r и пропорциональной

1° площади $d\omega$,

2° углу закручивания Θ на единицу длины, поскольку при прочих равных условиях относительное смещение двух рассматриваемых элементов пропорционально этому углу;

3° расстоянию r по той же причине.

Таким образом, эту силу можно выразить как . . . $G\,\Theta\,r\,d\,\omega$,

а её момент относительно оси призмы — как . . . $G\,\Theta\,r\,d\,\omega$, называя G коэффициент, определяемый экспериментально в зависимости от материала призмы, численное значение которого зависит от единиц, в которых измеряются угол Θ и линейные размеры. Следовательно, обозначая через $P\ R$ момент пары, действующей внешне на призму, имеем

$$P\,R = G\,\Theta \sum r^2\,d\,\omega \quad \ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

163. Когда сечение призмы представляет собой круг или правильный многоугольник, очевидно, что ось кручения проходит через центр фигуры. Можно доказать, что она всегда проходит через центр тяжести. Действительно, силы $G\,\Theta\,r\,,\,d\,\omega$ должны быть эквивалентны паре, и, следовательно, алгебраическая сумма их проекций на любую прямую равна нулю.

Пусть 0 — центр; обозначая для краткости силу $G\,\Theta\,r\,d\,\omega$, имеем

$$\sum F_x = 0 \qquad \text{и} \qquad F_x = F\,.\,\frac{y}{r}\,.$$

итак, $\sum F\,\frac{y}{r} = 0$, следовательно $\sum G\,\Theta\,y\,d\,\omega = 0$, или $G\,\Theta\,y\,d\,\omega = 0$.

Значит, этот центр тяжести лежит на оси $0x$ и на $0y$, и, следовательно, в 0.

164. Если обозначить через $T\,d\omega$ силу или сопротивление кручению, которое элемент $d\omega$ плоскости aa' оказывает на тело, имеем

$$T\,d\,\omega = G\,\Theta\,r\,d\,\omega\,, \quad \text{откуда} \qquad \frac{T}{r} = G\,\Theta$$

постоянное отношение для данного состояния кручения. Пусть r', наибольшее расстояние r, T принимает соответствующее значение T', которое является наибольшим натяжением в сечении aa'.

Подставляя $\frac{T'}{r'}$ вместо $G\,\Theta$ в формулу [1], имеем

$$P\,R = \frac{T'}{r'} \sum r^2\, d\,\omega \quad \ldots\ldots\ldots [\,2\,]$$

165. Когда сечение представляет собой круг радиуса r', имеем

$$\sum r^2\, d\,\omega = \int_0^{r'} r^2 \,.\, 2\,\Pi\, r\, d\, r = \frac{1}{2}\,\Pi\, r'^4 \text{, откуда } P\,R = G\,\Theta\,\frac{\Pi\, r'^4}{2} = T'\,.\,\frac{1}{2}\,\Pi\, r'^3 .$$

Если это кольцевая зона между двумя концентрическими окружностями, имеем

$$\sum r^2\, d\,\omega = \frac{1}{2}\,\Pi\left(r'^4 - r''^4\right).$$

Если это прямоугольник со сторонами b и c, то, проведя через центр две оси $0x$, $0y$, параллельные сторонам, имеем

$$\sum r^2\, d\,\omega = \sum\left(x^2 + y^2\right) d\,\omega = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 \,.\, c\, d\, x + \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} y^2\, b\, d\, y = \frac{1}{12}\, b\, c\left(b^2 + c^2\right).$$

Эта формула в случае квадрата сводится к

$$\sum r^2\, d\,\omega = \frac{1}{6}\, b^4 \text{, откуда } P\,R = G\,\Theta\,\frac{b^4}{6} = \frac{T'\, b^3}{3\sqrt{2}} = \frac{T'\, b^3}{4{,}24} .$$

166. *Экспериментальные данные.* Из опытов Дюло по кручению кованого железа следует, что приблизительно, принимая метр за единицу:

Для круглого железа	$G = 66 \times 10^8$	когда угол Θ выражен отношением дуги к радиусу.
Для квадратного железа	$G = 55 \times 10^8$	
Для круглого железа	$G = 115 \times 10^6$	когда угол Θ выражен в градусах.
Для квадратного железа	$G = 96 \times 10^6$	

Пример, круглое железо; диаметр 0,02; длина 3,17; полный угол закручивания 6°

$$P\,R = G\,\Theta\,.\,\frac{1}{2}\,\Pi\, r'^4 = 115 \times 10^6 \times \frac{6}{3{,}17} \times 1{,}57 \times \frac{1}{10^8} = 3{,}4 .$$

Итак, усилие P на расстоянии 1,00м от оси составило бы 3,4 кг, и дуга, описанная на этом расстоянии, была бы $\frac{6\,\Pi}{180} = 0{,}104$ *м* .

167. Можно видеть в *лекциях Навье*, стр. 106, результаты опытов по сопротивлению различных веществ кручению. Что касается значения T_1 для T', соответствующего пределу упругости, которое важно не превышать в конструкциях и машинах, точных опытов недостает. Предполагая, что формула [2] сохраняется вплоть до момента

разрушения, можно на основе известных опытов определить предельное значение T'. Навье нашел таким образом, полагая для цилиндрических стержней (165)

$$P\,R = \frac{1}{2}\,T'\,\Pi\,r'^{3}\,,$$

что для чугуна значение T', соответствующее разрушению, варьировалось от 20×10^6 до 45×10^6 в зависимости от природы чугуна. Казалось бы, следовательно, что на практике можно доводить T до 4×10^6. Но в машинах радиус r', рассчитанный исходя из этого значения, был бы меньше общеупотребительных размеров. Г-н Морен (Справочник по механике) полагает для чугуна или железа соотношение

$$P\,R = 315.000\,l^3\,,$$

где l — сторона квадратного сечения. Согласно этому и согласно пункту 165, имели бы

$$315.000 = \frac{T}{4{,}24}\,,\ \text{откуда}\ \ T_1 = 1.340\,.000\,.$$

Для дерева можно допустить, что значение T_1 и приведенное выше значение, подходящее для чугуна, находятся между собой в том же отношении, что и значения R_1, принадлежащие этим двум материалам, или примерно как 0,60 к 7,50. Получаем, таким образом, для дерева:

$$T_1 = 0{,}08 \times 1.340\,.000 = 107.000\,.$$

Глава 4. *О трении и жесткости канатов.*

§: 1 О трении скольжения.

168. Когда два тела соприкасаются так, что препятствуют или изменяют движение, которое имело бы место в силу сил, приложенных к этим телам, если бы они были разделены, они взаимно сжимаются. Это следствие физического строения тел, состоящих из молекул, которые в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения удерживаются в равновесии притягательными и отталкивающими силами, на них действующими; эти молекулы, следовательно, готовы уступить любой новой силе, входящей в систему. Но если тело твердое, величина его деформации может быть весьма ограниченной, потому что очень малое изменение формы приводит в действие очень большие молекулярные силы.

В *Рациональной Механике* предполагают существование тел настолько твердых, что контактное сжатие равно нулю; и из этого делают вывод, что когда два таких тела соприкасаются, взаимные действия, проявляющиеся в различных точках контакта, представляют собой силы, нормальные к поверхностям в этих точках; поверхности предполагаются непрерывными и точно такой же формы, как если бы контакта не было.

169. Но эта гипотеза никогда не подтверждается опытом. Если положить тело на другое неподвижное тело и предоставить его действию силы тяжести, как бы хорошо ни были выверены две контактные грани, плоскость, в которой эти две грани, по-видимому, сливаются, всегда может быть заметно наклонена к горизонту без того, чтобы верхнее тело скользило по другому, лишь бы этот наклон не был слишком велик; отсюда следует, что нижнее тело оказывает тогда на верхнее силы, равнодействующая которых наклонна к кажущейся поверхности контакта, ибо она вертикальна и, следовательно, составляет с кажущейся поверхностью контакта угол, равный углу наклона этой поверхности к горизонту.

К тому же выводу приходим, наблюдая, что тяжелое тело, положенное на другое, поверхность которого плоска и горизонтальна, не скользит по нему, хотя на него действует сила, параллельная плоскости, лишь бы отношение этой силы к весу тела не превышало определенного предела.

Аналогичные факты имеют место во время движения тела, скользящего по другому. Это тело, предоставленное действию силы тяжести на достаточно наклонной плоскости, приобретает скорость меньшую, чем та, которая соответствует высоте его спуска; положенное на горизонтальную плоскость и, помимо своего веса, подверженное действию горизонтальной силы, оно получает ускорение меньшее, чем то, которое, учитывая его массу, должно было бы быть ему сообщено этой силой: следовательно, в обоих случаях необходимо, чтобы неподвижное тело оказывало на подвижное тело наклонные реакции, составляющие которых, параллельные неподвижной плоскости, противоположны направлению движения.

170. В общем, когда два тела соприкасаются, рассматривая элемент поверхности контакта, если реакция, которую одно тело оказывает на другое в этой области, наклонна к поверхности контакта, её можно представить разложенной на две силы: одну, параллельную этой поверхности, и другую, нормальную к ней: параллельная составляющая называется трением скольжения, а другая — давлением (следовало бы сказать нормальным давлением) первого тела на второе в рассматриваемой области.

171. Законы трения скольжения полностью экспериментальны. Многочисленные наблюдения позволили установить:

1° что когда два тела скользят одно по другому, т. е. когда один и тот же элемент поверхности одного из них проходит последовательно и непрерывно в контакте с различными элементами поверхности другого тела, каждое тело получает от другого трение, то есть касательную реакцию, направление которой противоположно относительному движению первого тела по второму;

2° что трение для каждого элементарного участка контакта пропорционально интенсивности нормального давления и, следовательно, не зависит от протяженности контактирующих поверхностей, когда природа тел, их полировка или смазка не меняются;

3° что трение не зависит от относительной скорости контактирующих тел, по крайней мере в обычных случаях практики;

4° что, тем не менее, когда движение только вот-вот должно возникнуть между двумя телами, находившимися некоторое время в контакте и покое, трение обычно более значительно, чем когда движение уже установилось, будь то поступательное или просто вибрационное.

172. Приняв эти законы, из них следует, что если обозначить:

R — полную наклонную реакцию, которую элемент поверхности контакта, взятый на одном из тел, получает от другого тела,

N — давление в пределах этого элемента, т. е. составляющую или проекцию R на нормаль,

F — трение, соответствующее тому же элементу, т. е. касательную составляющую или проекцию R,

α — угол R с N, называемый углом трения,

f — число, называемое коэффициентом трения, которое зависит от природы и состояния полировки или смазки контактирующих тел и которое, впрочем, принимает только два значения в зависимости от того, установилось ли движение или только вот-вот должно возникнуть,

$$F = fN\ , \quad \text{и} \qquad F^2 + N^2 = R^2\ , \qquad \text{откуда} \qquad F = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\,R\ ;$$

$$N = \tan\alpha \qquad \text{откуда} \qquad \tan\alpha = f\ .^{(*)}$$

173. Применение к наклонной плоскости. Тело скользит по наклонной плоскости параллельно линии наибольшего ската. На него, помимо его веса P, действует сила Q, расположенная в плоскости, перпендикулярной горизонталям наклонной плоскости. Требуется закон движения.

Пусть i — острый угол наклонной плоскости с горизонтом, фиг. 40;

β — произвольный угол силы Q над линией наибольшего ската, взятой в восходящем направлении;

V — скорость, предполагаемая в восходящем направлении, в конце времени t.

Рассматриваемое поступательное движение есть также движение центра тяжести скользящего тела. Перенося в него все силы P, Q, N, F, где N и F представляют реакции наклонной плоскости, получим единственную равнодействующую φ, которая, будучи параллельна направлению прямолинейного движения, спроецируется в истинную величину на линию наибольшего ската, в то время как её проекция на нормаль к плоскости будет равна нулю. Таким образом, учитывая, что F действует сверху вниз,

$$\varphi = -P\sin i + Q\cos\beta - F$$
$$N + Q\sin\beta - P\cos i = 0$$

откуда, благодаря соотношению $F = f\ N$ (172), получаем

$$\varphi = Q\cos\beta - P\sin i - f\,(P\cos i_{Q}\sin\beta)$$

формула, которую легко получить *à priori*.

Следовательно, для ускорения $\frac{\varphi}{m}$ имеем

$$\frac{d\,v}{d\,t} = \frac{g}{P}\left(Q\cos\beta - P\sin i - f\,(P\cos i - Q\sin\beta)\right).$$

Следовательно, если интенсивность Q и угол β остаются теми же во время движения, ускорение постоянно, и движение является равномерно-переменным. В зависимости от того, положительна, отрицательна или равна нулю сила φ, предполагаемое восходящим в силу уже приобретенной к рассматриваемому моменту скорости движение является ускоренным, замедленным или равномерным. Оно также равно нулю, если тело находится в покое, но вот-вот начнет восходящее движение.

Если бы, напротив, приобретенная к рассматриваемому моменту скорость была нисходящей, достаточно, сохраняя восходящее направление за положительное направление φ, изменить знак F в первом из предыдущих уравнений, что равносильно изменению знака f в последней формуле; и тогда, в зависимости от того, будет ли сила φ

(*) Сведения о значениях f, полученных в результате эксперимента, см. во введении г-на Понселе в промышленную механику или в справочном пособии г-на Морина памятка по Практической Механике.

положительной, отрицательной или нулевой, нисходящее движение будет замедленным, ускоренным или вот-вот начнется.

Рассмотрим два случая, когда это покоящееся тело вот-вот начнет двигаться. Если тело вот-вот начнет подниматься, имеем

$$\varphi = 0 \ldots\ldots\ldots \quad Q = P\,\frac{\sin i + f\cos i}{\cos\beta + f\sin i}\,.$$

Если в этом случае сила Q направлена ниже параллели к наклонной плоскости, называя β' её угол с этой стороны, необходимо, чтобы

$$\cos\beta' - f\sin\beta' > 0 \qquad \text{или} \qquad \tan\beta' < \frac{1}{f} \qquad \text{или} \qquad \beta' < 90^\circ - \alpha\,.$$

Если тело вот-вот начнет опускаться, имеем, с изменением знака f, $\varphi = 0$, откуда

$$Q = P\,\frac{\sin i - f\cos i}{\cos\beta - f\sin\beta}\,.$$

Если Q находится между двумя вышеуказанными значениями, равновесие тела устойчиво.

Если Q находится между двумя вышеуказанными значениями, баланс тела стабилен.

Если сила Q равна нулю и тело вот-вот начнет опускаться, имеем:

$$\sin i - f\cos i = 0 \ \text{ или } \ \tan i = f\,.$$

Рассмотрим теперь два возможных случая движения тела. Если оно обладает начальной восходящей скоростью V_0, сохраняя за φ её предыдущее выражение, имеем

$$V = V_0 + \frac{g\,\varphi}{P}\,t \qquad \text{и} \qquad x = x_0 + V_0\,t + \frac{g\,\varphi}{P}\,\frac{t^2}{2}\,,$$

и получим, таким образом, скорость и положение тела через любое время t при условии, что t не настолько велико, чтобы V стало отрицательным, когда φ отрицательна, ибо эти формулы существенно предполагают движение восходящим.

Если же тело обладает начальной нисходящей скоростью, отсчитывая скорости и x в том же направлении, два последних уравнения сохраняются при том же условии, но выражение φ, отсчитываемое в нисходящем направлении, без изменения определения угла β, есть

$$\varphi = P\sin i - Q\cos\beta - f\,(P\cos i - Q\sin\beta)\,.$$

§: 2. О сопротивлении, называемом трением качения.

174. Тело, ограниченное криволинейной поверхностью и положенное на горизонтальную плоскость, с которой оно, как предполагается, имеет лишь точку или ребро контакта, будучи подвержено вертикальным силам, не могло бы находиться в равновесии, если бы не было деформации, если только равнодействующая этих сил не проходила бы через точку или ребро контакта. Опыт показывает, что это не так. Пусть,

например, фиг. 41, однородный цилиндр или каток положен на два горизонтальных бруса, оставляющих промежуток, через который проходит бечевка, охватывающая пол-оборота катка и несущая на своих концах два равных груза $\frac{1}{2}Q$, $\frac{1}{2}Q$: требуется с той или другой стороны добавочный груз q не только для нарушения покоя, но даже для поддержания катка в движении, когда его начали раскачивать. Кулон нашел, что для катка из бакаутового дерева диаметром 0м,162, катящегося по дубовым линейкам, когда грузы $\frac{1}{2}Q$, включая вес катка, составляли вместе 500 килограммов, добавочный груз q должен был быть равен 3 килограммам, чтобы очень медленное движение продолжалось после того, как было сообщено. Тогда цилиндр находится в равновесии под действием сил $\frac{1}{2}Q$, $\frac{1}{2}Q+q$ и равнодействующей реакций нижнего тела, которая, следовательно, также вертикальна, равна Q + q и проходит через точку A' на расстоянии AA' от вертикального диаметра цилиндра. Обозначая это расстояние через δ, оно удовлетворяет уравнению моментов относительно A:

$$(Q+q)\,\delta = q\,r \quad \ldots\ldots\ldots [\,1\,] \qquad \text{откуда} \qquad \delta = \frac{3}{503}\,r = 0{,}00048\ м\ .$$

Эти весьма простые соображения дают, как заметил г-н Дюпюи (*Очерк о тяге повозок... 1837*), ясное понятие о факте, который обычно обозначают названием трения второго рода или трения качения и который состоит вообще в том, что когда тело катится или вот-вот покатится по другому, нормальные составляющие реакций последнего имеют равнодействующую, которая проходит на малом расстоянии впереди нормали в предполагаемой геометрической точке контакта, со стороны существующего или вот-вот возникающего движения.

175. Кулон установил, что отношение $\frac{q}{Q+q}$ добавочного веса к нормальной реакции или давлению постоянно для одного и того же радиуса r и для одних и тех же контактирующих материалов: факт, аналогичный одному из законов трения скольжения.

Кулон полагал также, что когда радиус r изменяется, отношение $\frac{q}{Q+q}$ изменяется обратно пропорционально, так что можно было бы иметь

$$\frac{q}{Q+q} = \frac{a}{r}\ ,$$

где a — постоянная. Но так как одновременно согласно приведенному выше уравнению [1] имеем

$$\frac{q}{Q+q} = \frac{\delta}{r}\ ,$$

отсюда следовало бы, что $\delta = a$, то есть, каков бы ни был радиус r, точка A', центр нормальной реакции, находилась бы на постоянном расстоянии от нормали CA, опущенной из оси цилиндра на неподвижную плоскость. Однако видно, что этот закон не может быть принят в общем случае, поскольку δ всегда должно быть меньше r.

Г-н Дюпюи, в цитированном труде и в Анналах мостов и дорог (1842 – май), привел результаты опытов, из которых заключил, что расстояние δ, когда контактирующие материалы остаются теми же, изменяется пропорционально квадратному корню из радиуса; таким образом, можно было бы положить

$$\delta = a\sqrt{r} \qquad \text{и} \qquad \frac{q}{Q+q} = \frac{a}{\sqrt{r}}.$$

Согласно ему, имеем:

	Значения	
	δ	$\frac{q}{Q+q}$
Для дерева катая по дереву	$0{,}0011\sqrt{r}$	$\frac{0{,}0011}{\sqrt{r}}$
Для железа – – по влажному дереву	$0{,}0010\sqrt{r}$	$\frac{0{,}0010}{\sqrt{r}}$
Для железа – – по железу	$0{,}0007\sqrt{r}$	$\frac{0{,}0007}{\sqrt{r}}$
Для колес по мощеным камнем дорогам около	$0{,}03\sqrt{r}$	$\frac{0{,}03}{\sqrt{r}}$

Г-н Морен, после новых опытов, оспорил точность этого закона и утверждал, что закон Кулона ближе к истине в обычных случаях практики. Но г-н Дюпюи настаивает на своем мнении, и только противоречивые опыты, по-видимому, могут рассеять сомнения по данному вопросу факта.

176. Предположим теперь, что цилиндр, положенный на горизонтальную плоскость (фиг.42) и подверженный действию вертикальных сил, равнодействующая Q' которых проходит через центр фигуры C, получает, кроме того, действие горизонтальной силы q' на расстоянии h от плоскости, достаточной для того, чтобы равновесие было на грани нарушения. Тогда равнодействующая Q' и q', а следовательно, и равнодействующая реакций нижнего тела, будут наклонны и будут проходить через точку A' впереди A. Цитированные авторы допускают, что в этом случае момент q' h силы, параллельной плоскости, относительно A или A' пропорционален нормальному давлению Q' и имеет то же значение, что и момент $q\ r$ в предыдущем случае, предполагая давления $Q + q$ и Q' равными. Отсюда следовало бы, что расстояние AA' было бы тем же, так как A', находясь на равнодействующей Q' и q', обозначая AA' через δ', должно выполняться

$$\delta' = \frac{q'h}{Q'} \text{ и, следовательно, } \delta' = \delta$$

в силу уравнения [1] и только что высказанной гипотезы.

177. Во втором рассмотренном случае равновесия со стороны плоскости имеется касательная реакция, равная q'. Эта реакция должна быть меньше $f\,Q'$, обозначая через f коэффициент трения скольжения, иначе цилиндрическое тело, выходя из покоя, скользило бы вместо того, чтобы катиться. Следовательно, для заданного значения h, в зависимости от того, будет ли значение q', определяющее качение, а именно

$$\frac{\delta\,Q'}{h} \quad < \quad \text{или} \quad > \quad f\,Q',$$

или в зависимости от того, $\quad h \quad > \quad$ или $\quad < \quad \dfrac{\delta}{f}$,

при выходе из покоя будет иметь место качение или скольжение. Последнее должно быть очень редким.

Пусть, например, $\delta = 0{,}001\sqrt{r}$ и $f = 0{,}15$: достаточно, чтобы имело место качение, сделать $h > 0{,}0066\ m\,.\sqrt{r}$.

178. Применения. 1-е. Пусть однородный цилиндр (фиг. 43), вес которого P, катится равномерно по горизонтальной плоскости; для этого на него действует постоянная горизонтальная сила Q, которую предполагают приложенной к шнуру, намотанному на концентричный первому цилиндр. При равномерном движении внешние силы, действующие на катящееся тело, удовлетворяют условиям равновесия. Эти силы суть P, Q, нормальная реакция N, проходящая через A', касательная реакция F; и имеем $N = P$, $F = Q$, $Qh = P\,\delta$.

Найдем работу Q, затраченную на перемещение цилиндра на некоторое расстояние. Пусть r — радиус цилиндра, V — скорость оси C, а U — скорость точки D приложения Q, имеем $U : V :: h : r$, откуда $U = \frac{V\,h}{r}$. Работа Q в секунду равна, следовательно,

$$Q\,U = \frac{P\,V\,\delta}{r}, \quad \text{откуда} \quad \frac{Q\,U}{P\,V} = \frac{\delta}{r}.$$

PV, произведенный на вес P путем, пройденным за одну секунду, является полезным эффектом за это время, и мы видим, что отношение работы Q к этой цели не зависит от положения точки приложения D.

179. 2-е применение. Брус, вес которого вместе с грузом равен P, положен на два катка одинакового диаметра $2r$, которые опираются на горизонтальную плоскость; спрашивается, какова горизонтальная сила Q, приложенная к брусу, которая будет поддерживать равномерное движение системы. Пусть фиг. 44 — один из катков, равномерно перемещающийся в направлении, указанном стрелкой. Этот цилиндр, рассматриваемый отдельно, пренебрегая его весом, предполагаемым очень малым по сравнению с P, находится в равновесии под действием реакций, которые он получает от нижней плоскости и от бруса, и которые могут быть сведены к следующему:

1° нормальная реакция N, проходящая на расстоянии $AA' = \delta$ от вертикального диаметра AB;

2° касательная реакция F, которую можно рассматривать по желанию как проходящую через A или A';

3° нормальная реакция n', проходящая на расстоянии $BB' = \delta'$ позади B, поскольку таково направление относительного качения по нижней плоскости бруса;

4° касательная реакция F', проходящая через B или B'.

Равновесие этих сил требует $N = N'$, $F = F'$ и, беря моменты относительно A',

$$N'(\delta + \delta') = F' \,.\, 2r \,.$$

Аналогичный результат получится для второго катка:

$$N_1'(\delta + \delta') = F_1' \,.\, 2r \,.$$

Теперь брус подвержен, с одной стороны, горизонтальной силе Q и вертикальным нисходящим силам, сумма которых равна P, с другой стороны — действиям, равным и противоположным вертикальным силам N', N_1', и горизонтальным силам $F = F'$. Следовательно, имеем

$$P = N' + N_1' \text{ и } Q = F' + F_1' \,.$$

Складывая два предыдущих уравнения, получаем

$$(N' + N_1')(\delta + \delta') = (F' + F_1')\, 2r \,,$$

следовательно $$P(\delta + \delta') = 2r \,.\, Q \,.$$

Пример: $\delta = 0{,}03\sqrt{r}$, $\delta' = 0{,}001\sqrt{r}$ $Q = \frac{0{,}031}{2\sqrt{r}} P$.

если . . . . . $r = 0{,}25$, $Q = 0{,}031\, P$.

Замечание. Скорость бруса, очевидно, вдвое больше скорости оси C' катка.

180. 3-е применение. Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и имеющее центр тяжести на оси фигуры C (фиг. 45), катится по плоскости. На него, независимо от реакций этой плоскости, действуют различные силы, равнодействующая которых проходит через ось C, перпендикулярна ей и может быть заменена двумя силами: одной P — нормальной, другой T — параллельной плоскости. Требуется закон прямолинейного движения оси C и интенсивности реакций плоскости.

Помимо сил P и T, цилиндр получает от плоскости неизвестную касательную реакцию F, плюс нормальную реакцию N, проходящую через A', интенсивность которой равна P, поскольку центр тяжести C движется параллельно плоскости (38).

Применим к цилиндру теорему об эффекте работы (39). Пусть v — скорость оси C в произвольный момент. Скорости различных точек тела такие же, как если бы оно вращалось вокруг оси A. Пусть ω — угловая скорость этого вращательного движения. Мощность живого действия системы в рассматриваемый момент равна

$$\frac{1}{2}\,\omega^2 \sum m\,r^2 \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{R^2}\left(M\,R^2 + \sum m\,r_1^2\right),$$

называя $\sum m\,r^2$ моментом инерции относительно оси A, M — массой системы, R — радиусом AC, $\sum m\,r_1^2$ — моментом инерции относительно оси C, проходящей через центр тяжести. Следовательно, приращение мощности живого действия между двумя моментами, когда скорость C равна сначала v_0, затем v, есть

$$\frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right)\left(M + \frac{\sum m\,r^2}{R^2}\right).$$

Теперь, за тот же интервал, работа T равна T_x, обозначая через x прямолинейный путь, пройденный C параллельно плоскости. Работа P равна нулю. Если, наконец, обозначить через ζ_f работу, являющуюся результатом контакта цилиндра и плоскости, имеем

$$\frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right)\left(M + \frac{\sum m\,r^2}{R^2}\right) = T_x - \varsigma_f .$$

Согласно известным опытам, работа ζ_f, по-видимому, не зависит от величины скорости, но только от давления P и радиуса R. Предположим, что, не меняя этих последних величин, мы уменьшим T до значения T', необходимого для поддержания равномерного движения; получили бы

$$T'\,x - \varsigma_f = 0 \qquad \text{и одновременно} \qquad T'\,R = P\,\delta ,$$

откуда заключаем и $\varsigma_f = \frac{P\,\delta}{R_x}$, следовательно,

$$\frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right)\left(M + \frac{\sum m\,r_1^2}{R^2}\right) = \left(T - P\,\frac{\delta}{R}\right)x \quad \ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

Таким образом, движение оси C является равномерно-переменным.

Остается определить интенсивность F, и её находят с помощью теоремы о движении центра тяжести. Сила F, будучи перенесена в C вместе со всей массой тела, дает при применении к этой фиктивной материальной точке теоремы об эффекте работы

$$\frac{1}{2}\,M\left(v^2 - v_0^2\right) = \left(T - F\right)x .$$

Из этого уравнения получаем

$$F = \frac{T\sum m\,r_1^2 + P\,M\,R\,\delta}{\sum m\,r_1^2 + M\,R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [\,2\,]$$

Пример. Если бы речь шла об однородном цилиндре, предоставленном действию силы тяжести на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол i, имели бы

$$T = M\,g\sin i , \qquad P = M\,g\cos i , \qquad \sum m\,r_1^2 = \frac{1}{2}\,M\,R^2 .$$

Уравнение [1] стало бы

$$v^2 - v_0^2 = \frac{4}{3}\, g\, x \left(\sin i - \frac{\delta}{R} \cos i \right) \quad \ldots\ldots\ldots [\,3\,]$$

в то время как если бы допустить гипотезу тела, скользящего без трения по той же наклонной плоскости, имели бы

$$v^2 - v_0^2 = 2\, g\, x \sin i\ .$$

Уравнение [2] при той же подстановке становится

$$F = \frac{1}{3}\, M\, g \left(\sin i + 2 \cos i\, \frac{\delta}{R} \right).$$

Кроме того, сила F не может превышать определенного предела, так как цилиндр не скользит по плоскости. Имеем, следовательно,

$$F \;<\; f\, N \qquad \text{или} \qquad F \;<\; f\, M\, g \cos i\ ,$$

откуда
$$\frac{1}{3}\, M\, g \left(\sin i + 2\, \frac{\delta}{R} \cos i \right) \;<\; f\, M\, g \cos i\ ,$$

или
$$\tan i \;<\; 3\, f - 2\, \frac{\delta}{R}\ .$$

Следовательно, если угол наклона i втрое больше угла трения, имеет место скольжение и уравнение [1] более не применимо.

Г-н Дюпюи в своем очерке пришел другим путем к тем же формулам.

181. *Частный случай*. Однородный цилиндр, который катится вверх под действием силы тяжести и реакций наклонной плоскости. Формула [3] сохраняется с изменением знака x. Если предположить для простоты, что δ/R можно пренебречь по сравнению с $\sin i$ и что конечная скорость v равна нулю, то высота подъема равна

$$x \sin i = \frac{3}{2}\, \frac{v_0^2}{2\, g}\ .$$

Это связано с тем, что мощность живого действия цилиндра в начальный момент составляет $\frac{3}{2} . \frac{1}{2} M\, v_0^2$.

Можно заметить, что в этом случае сила F, касательная составляющая реакции плоскости и необходимая причина замедления вращательного движения, действует в восходящем направлении, потому что цилиндр стремится скользить вниз, в то время как его ось поднимается.

182. Во многих вопросах обычной механики трением качения можно пренебречь. Таков случай рычага или коромысла весов, которые опираются на опору ножом, а не цапфой.

§: 3. Клиновой пресс.

183. В устройстве, представленном на фигуре 46, требуется соотношение между силой P, приложенной к головке клина, и давлением Q, которое воспринимает прессуемый

материал. Клин в момент, когда он вот-вот начнет опускаться, подвержен пяти силам: P, N, N', $f N$, $f N'$, и если предположить его равнобедренным, имее

$$[\,1\,] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad P = 2\,N\,(\cos\alpha + f\,\sin\alpha)\,.$$

Блок, помещенный между клином и прессуемым материалом, подвержен, пренебрегая его весом, пяти силам: N_1 , $f\,N_1$, N'', $f\,N''$, Q', из которых первые две равны и противоположны N и $f\,N$ в силу принципа равенства действия и противодействия. Равновесие этого блока дает два уравнения, члены которых зависят только от интенсивностей и направления сил, независимо от их неизвестных точек приложения:

$$N\sin\alpha \;-\; f\,N\cos\alpha \;-\; f\,N'' \;-\; Q = 0$$
$$N\cos\alpha \;+\; f\,N\sin\alpha \;-\; N'' = 0$$

Исключая N'', получаем

$$[\,2\,] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad N\left(\sin\alpha - 2\,f\,\cos\alpha - f^2\,\sin\alpha\right) = Q\,.$$

Из [1] и [2] получаем

$$[\,3\,] \ldots \quad P = \frac{2\,(\cos\alpha + f\,\sin\alpha)}{\sin\alpha - 2\,f\,\cos\alpha - f^2\,\sin\alpha}\,Q \;=\; \frac{2\,(1 + f\,\tan\alpha)}{\tan\alpha - 2\,f - f^2\,\tan\alpha}\,Q\,.$$

Пример. $\tan\alpha = 20\,;\quad f = 0{,}10\,;\quad \dfrac{P}{Q} = 0{,}306\,;\quad \dfrac{Q}{P} = 3{,}27\,;\;.$

В то время как если бы трение отсутствовало, имели бы $\frac{P}{Q} = 0{,}1$. Предел малости отношения $\frac{P}{Q}$ соответствует $\tan\alpha = \infty$, что видно, записав уравнение [3] в виде

$$\frac{P}{Q} = \frac{2\left(f + \dfrac{1}{\tan\alpha}\right)}{1 - f^2\,\dfrac{2\,f}{\tan\alpha}}\,.$$

Таким образом, предельное $\frac{2\,f}{1-f^2}$, в то время как если бы трением пренебрегали, $\frac{P}{Q}$ неограниченно приближалось бы к нулю.

184. Когда равновесие установлено, как и ранее, между силами P, Q и трением, предположим, что добавочная сила сообщила движение системе и затем прекратила действие, предоставив её силам P и Q ; в случае, если эти силы оставались бы тогда постоянными, движение было бы равномерным, и можно задаться целью сравнить в этой гипотезе работу P с работой Q. Если обозначить через x (фиг. 47) вертикальный путь, проходимый головкой клина, и через ς горизонтальный путь, проходимый одновременно подвижным блоком пресса, то P_x — работа P, а $Q\,\varsigma$ — работа давления, приложенного к сжимаемому материалу. Имеем

$$[\,4\,] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad x = \frac{1}{2}\,\varsigma\,\tan\alpha$$

и умножая [3] и [4], получаем

$$P\,x = \frac{\tan\alpha + f\,\tan^2\alpha}{\tan\alpha + 2\,f - f^2\tan\alpha}\,Q\,\varsigma$$

или

$$P\,x = \left(1 + \frac{f\left(\tan^2\alpha + 2 + f\,\tan\alpha\right)}{\tan\alpha - 2\,f - f^2\tan\alpha}\right)Q\,\varsigma\ .$$

Можно было бы заключить это соотношение непосредственно из уравнения [3], заметив, что отношение путей $x\ ,\varsigma$ таково, что $P\,x$ и $Q\,\varsigma$ становятся равными, когда f становится нулевым.

Работа $Q\,\varsigma$ является полезным эффектом и оказывается значительно меньше движущей работы $P\,x$. Потеря еще более значительна, когда сила P создается ударом; деформация деталей устройства, опор и их сотрясение вызывают работы сопротивления и расход мощности в ущерб полезной работе. Эти потери уменьшаются при равной затрате работы, если уменьшить высоту h падения ударяющего тела, увеличивая его массу так, чтобы произведение $m\,h$ оставалось тем же.

§: 4. О вороте.

185. Вес ворота (фиг. 48) равен $П$; две силы P и Q, кроме того, действуют на него в плоскостях, перпендикулярных оси. Движение вот-вот должно возникнуть, и предполагается, что это произойдет в направлении, определяемом силой Q, работа которой была бы положительной и которая, следовательно, является движущей силой. Требуется определить Q, зная $П$, P, размеры ворота, направления P и Q.

Можно, не меняя условий равновесия, заменить каждую из сил $П$, Q, P двумя другими параллельными силами, действующими в плоскостях, всегда перпендикулярных оси, но проходящих через подшипники A' и A''.

Силы $П'$ и P', будучи известны, могут быть сложены в одну силу S' (фиг. 49).

В точке контакта B' цапфы и подшипника возникает реакция, составляющие которой — одна нормальная, другая касательная — суть N' и $f\,N'$.

Таким образом, в плоскости подшипника A' будут действовать четыре силы Q', S', N', $f\,N'$; а в плоскости подшипника A'' — четыре аналогичные силы Q'', S'', N'', $f\,N''$. Для каждой из этих двух систем сил в отдельности равнодействующая переносного движения должна быть отдельно равна нулю; ибо в противном случае ворот, подверженный действию двух или трех сил в параллельных плоскостях, не мог бы оставаться в равновесии. Если назвать R' равнодействующую сил Q' и S', она должна быть, следовательно, равна и противоположна равнодействующей сил N' и $f\,N'$; а так как последние взаимно перпендикулярны, должно выполняться

$$R'^2 = N'^2 + f^2\,N'^2\ ,$$

откуда $f\ N' = \frac{f\ R'}{\sqrt{1+f^2}} = f_1\ R'$, заменяя для краткости $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$ через f_1, который, впрочем, очень мало отличается от f.

Точно так же, если R'' — равнодействующая двух сил Q'' и S'', имеем:

$$f\ N'' = \frac{f\ R''}{\sqrt{1+f^2}} = f_1\ R''.$$

Значения R' и R'' равны, кроме того:

$$R' = \sqrt{Q'^2 + S'^2 + 2\ Q\ S'\cos(Q', S')} \quad \ldots\ldots\ldots [1]$$

$$R'' = \sqrt{Q''^2 + S''^2 + 2\ Q''\ S''\cos(Q'', S'')} \quad \ldots\ldots [2]$$

Теперь, ворот находится в равновесии под действием сил $П$, P, Q, N', N'', $f\ N'$, $f\ N''$, имеем, беря моменты относительно оси вращения:

$$Q\ q = P\ p + f\ N'\ r' + f\ N''\ r''$$

или

$$Q\ q = P\ p + f_1 R'\ r' + f_1 R''\ r'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [3],$$

(q, p, r', r'' обозначают радиусы колеса, вала и двух цапф).

Задача, таким образом, сводится к уравнениям, так как силы Q' и Q'', которые входят в значения R' и R'', а следовательно, и в значения $f_1\ R'$ и $f_1\ R''$, имеют с силой Q определенные соотношения, зависящие исключительно от расстояний плоскости колеса до плоскостей подшипников.

Предполагая, что силы Q и P сохраняют свои направления во время движения ворота, получим работу Q за каждый полный оборот ворота, умножая $Q\ q$ на 2π. А именно:

$$Q\ .\ 2\ П\ q = P\ .\ 2\ П\ p + f_1 R'\ 2\ П\ r' + f_1 R''\ .\ 2\ П\ r''.$$

$P\ .\ 2\ П\ p$ — динамический эффект; остаток правой части — работа, потребляемая трением.

186. *1-й пример*. Силы P и Q вертикальны (фиг. 50). Обозначая через H и K точки, где плоскости, перпендикулярные оси и проходящие через силы P и Q, пересекают эту ось, положим

$$A'A'' = a, \quad A'H = m'a, \quad A'G = l'a, \quad A'K = n'a.$$
$$A''H = m''a, \quad A''G = l''a, \quad A''K = n''a.$$

Отсюда следует

$$P' = m''P, \quad П = l''П, \quad Q' = n''Q.$$
$$P'' = m'P, \quad П'' = l'П, \quad Q'' = n'Q$$

Затем

$$R' = m''p + l''П + n''Q; \qquad R'' = m'P + l'П + n'Q.$$

и уравнение [3], которое служит для определения Q, является тогда уравнением первой степени.

Заметив, что $m' + m'' = l' + l'' = n' + n'' = 1$, мы находим в частном случае, когда $r' = r''$,

$$Q = \frac{P\ p + f_1 (P + \Pi)\ .\ r'}{q - f_1 r'},$$

независимая формула расстояния a и его подразделений в точках H, G, K.

187. *2-й пример*. Силы P и Q все еще вертикальны, но одна из них, P, действует за подшипником A'. (фиг. 51). Пусть по-прежнему $A'A'' = a$,

$$\begin{array}{lll} A'H = m'a, & A'G = l'a, & A'K = n'a \\ A''H = m''a, & A''G = l''a, & A''K = n''a \end{array}.$$

Выводим, как и выше,

$$\begin{array}{lll} P' = m''P, & \Pi = l''\Pi, & Q' = n''Q \\ P'' = m'P, & \Pi = l'\Pi, & Q'' = n'Q \end{array},$$

Затем
$$R' = m''P + l''\Pi + n''Q$$
$$R'' = -m'P + l'\Pi + n'Q$$

и
$$Q\ q = P\ p + f_1 R'\ .\ r' = f_1 R''\ r''$$

Члены $f_1 R'\ .\ r'$ и $f_1 R''\ .\ r''$ должны быть существенно положительными, так как трение цапф всегда действует в направлении, противоположном движению ворота, касаются ли они нижней или верхней части подшипника. Следовательно, следует брать только абсолютное значение R''.

В обычных случаях или Qq мало отличается от Pp, и, следовательно, где $\frac{P\ p}{q}$ – значение, приближенное к Q, можно заранее убедиться, следует ли принимать

$$R'' = -m'P + l'\Pi + n'Q \qquad \text{или} \qquad R'' = m'P - l'\Pi - n'Q$$

в любом случае мы сможем убедиться после вычисления Q, не исходили ли мы из ложной гипотезы.

188. *3-й пример*. Сила P вертикальна, как и Π, но сила Q горизонтальна; все эти силы действуют между плоскостями, проходящими через A' и A''. В этом случае имеем

$$S' = P' + \Pi', \qquad S'' = P'' + \Pi'', \qquad R' = \sqrt{S'^2 + n''^2 Q^2}, \qquad R'' = \sqrt{S''^2 + n'^2 Q^2}.$$
$$Q\ q = P\ p + f_1 r'\ R' + f_1 r''\ R''.$$

R' и R'' являются функциями известных сил S', S'' и неизвестной Q. Исключение R' и R'' привело бы к уравнению четвертой степени относительно Q . Лучше в случаях численных приложений действовать методом проб при определении Q. Замечаем, что ввиду малости коэффициента f_1 и радиусов r', r'' по сравнению с q и p, произведение $Q\ q$ лишь немного больше $P\ p$, откуда заключаем приближенное значение Q в виде числа, от которого достаточно взять первые две значащие цифры. Подставляя эту величину в выражения для R' и R'', получаем численно их приближенные значения и, перенося их в последнюю приведенную выше формулу, получаем, с обычно достаточной точностью, значение Q. Если бы, однако, оно заметно отличалось от первого предположения, можно было бы подставить его в формулы для R' и R'' и, следовательно, прийти к более точной

оценке Q. Может случиться, что потребуется алгебраическое выражение для Q, больше не содержащее вспомогательных величин R', R''. К этому приходят просто с помощью приближенной формулы, принадлежащей г-ну Понселе, как мы сейчас объясним.

189. Предположим, что мы хотим приближенно заменить радикал $\sqrt{x^2+y^2}$ двучленом $\alpha x+\beta y$; можно было бы выбрать α и β так, чтобы для двух заданных значений $\frac{x}{y}$ имело место равенство между этими двумя выражениями. Но для любой другой гипотезы будет разница, и отношение этой разности к истинному значению $\sqrt{x^2+y^2}$ будет относительной ошибкой.

Обозначим её через z.

Получим $\quad z=\dfrac{\alpha x+\beta y-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}-1 \quad$ или $\quad z=\dfrac{\alpha n+\beta}{\sqrt{n^2+1}}-1$

обозначая n переменной $\frac{x}{y}$.

Предположим, что известно, что отношение n может изменяться только между числом K и бесконечностью (например, если известно, что $x > y$, отсюда следует $K = 1$). Требуется определить α и β так, чтобы между $n = K$ и $n = \infty$ наибольшее абсолютное значение z было минимальным по отношению к различным значениям, которые можно было бы выбрать для α и β.

Для $n=K$ имеем $\quad z'=\dfrac{\alpha K+\beta}{\sqrt{K^2+1}}-1$.

Для $n=\infty$ $\quad z''=\alpha-1$.

Между этими двумя значениями z, рассматриваемое как функция n, способно иметь максимум, который определяется дифференцированием. Находим

$$\frac{dz}{dn}=\frac{\alpha-\beta n}{(n^2+1)\frac{3}{2}}.$$

Отсюда заключаем: 1° что $\frac{dz}{dn}$ убывает по мере увеличения n; 2° что максимум z соответствует $n=\frac{\alpha}{\beta}$.

Максимум равен $\quad z'''=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-1$.

Приняв это, г-н Понселе замечает, что можно было бы определить α и β так, чтобы крайние ошибки z' и z'' были равны нулю, что дало бы

$$\alpha=1 \qquad \beta=\sqrt{K^2+1-1},$$

но что лучше, уменьшая α и β, сделать z' и z'' отрицательными и тем самым сделать максимум z''' меньше. Это приводит его к двойному условию:

$$Z'''=-z' \qquad \text{и} \qquad z'''=-z'',$$

которое гарантирует, что во всех случаях численное значение положительной или отрицательной ошибки не превысит z''' или $\alpha-1$.

Имеем, следовательно, два уравнения для вычисления α и β, когда задано K:

$$\alpha^2+\beta^2 = 2 - \frac{\alpha K+\beta}{\sqrt{K^2+1}} = 2-\alpha$$

Для $K=0$ находим $\alpha=\beta=0{,}83$ и $z'''=0{,}17$ или $\frac{1}{6}$.

Для $K=1$ находим $\alpha=0{,}96$, $\beta=0{,}40$ и $z'''=0{,}04$ или $\frac{1}{25}$.

Таким образом, когда заранее известно, что x не может быть меньше y, можно приближенно положить

$$\sqrt{x^2+y^2} = 0{,}96\,x + 0{,}40\,y$$

и быть уверенным, что ошибка не превысит $\frac{1}{25}$ точного значения.(*)

(*) В литографированных лекциях г-на Понселе в прикладной школе Меца приведена таблица значений α и β, а также предела ошибки $1-\alpha$, вычисленных для значений K от 0 до 10.

Следующим образом можно восстановить формулы, которые он привел для упрощения этих расчетов.

Пусть ϵ — предел ошибки, соответствующий K. Имеем три уравнения:

$$\epsilon = 1-\alpha \qquad \epsilon = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}-1 \qquad \epsilon = 1-\frac{\alpha K+\beta}{\sqrt{K^2+1}}$$

Первые два дают:

$$\alpha = 1-\epsilon \quad \text{и} \quad \beta = 2\sqrt{2}$$

третье уравнение после подстановки принимает вид:

$$1-\epsilon = \frac{(1-\epsilon)K+2\sqrt{2}}{\sqrt{K^2+1}} \quad \text{или} \quad K+\frac{2\sqrt{2}}{1-\epsilon} = \sqrt{K^2+1}$$

или, для краткости, $\frac{2\sqrt{2}}{1-\epsilon}=\epsilon'$; следует

$$K+\epsilon' = \sqrt{K^2+1} \quad \text{откуда} \quad 2\epsilon' K+\epsilon'^2 = 1 \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{K} = \frac{2\epsilon'}{1-\epsilon'^2}$$

Выражения $\frac{2\sqrt{2}}{1-\epsilon}$ и $\frac{2\epsilon'}{1-\epsilon'^2}$ наводят на мысль, что:

$$\epsilon = \tan^2\varphi \quad \text{откуда} \quad \epsilon' = \tan 2\varphi \quad \text{и} \quad \frac{1}{K} = \tan 4\varphi$$

в то же время, как $\alpha = 1-\tan^2\varphi$ и $\beta = 2\tan\varphi$.

Исходя из этого, по заданному K можно вычислить угол φ, а затем значения ϵ, α и β.

Ниже приведена таблица, рассчитанная в Меце г-ном Госселеном.

Значения K	α	β	$1-\alpha=\epsilon$ предел ошибки		Значения K	α	β
0	0.8281	0.8284	1/6		6	0.9983	0.0826
1	0.9605	0.3978	1/25		7	0.9987	0.0710
2	0.9859	0.2327	1/71		8	0.9991	0.0622
3	0.9935	0.1612	1/154		9	0.9993	0.0554
4	0.9962	0.1226	1/266		10	0.99935	0.0498
5	0.9976	0.0988	1/417				

---

190. Применим эту теорему к примеру пункта 188. Если известно, что S' и S'' превышают $n''Q$ и $n'Q$, будем иметь с точностью до $\frac{1}{25}$

$$R' = 0{,}96\, S' + 0{,}40\, n''\, Q \qquad \text{и} \qquad R'' = 0{,}96\, S'' + 0{,}40\, n'\, Q\ ;$$

и, подставляя в выражение для $Q\,q$ и решая, получим

$$Q = \frac{P\ p + 0{,}96\, f_1 (r'\, S' + r''\, S'')}{q - 0{,}40\, f_1 (r'\, n'' + r''\, n')}\ .$$

191. Может случиться, что на ворот действует сила F в направлении оси; тогда возникает равная и противоположная реакция либо против торца одной из цапф, либо против её буртика. В обоих случаях нужно добавить в правую часть уравнения [3] пункта 185 момент возникающих трений.

В первом случае пусть A — ось круга, которым заканчивается цапфа; допустим как достаточно приближенное, что давление F равномерно распределено по этой поверхности; $\frac{F}{A}$ будет давлением на единицу поверхности. Если a обозначает элемент поверхности круга, а x — его расстояние от центра, то $\frac{F}{A}.\,a$ будет давлением, воспринимаемым этим элементом, $f\,\frac{F}{A}.\,a$ — соответствующим трением, и $f\,\frac{F}{A}.\,a\,x$ — моментом этого трения. Величина, которую нужно ввести в правую часть уравнения [3] пункта 185, будет, следовательно, $\sum f\,\frac{F}{A}\,a\,x$ или $f\,\frac{F}{A}\sum a\,x$; эта сумма берется по всем элементам круга, радиус которого мы обозначим через ζ.

Часть $\sum a\,x$, соответствующая кольцевой зоне ширины dx, свелась бы к $2\,\Pi\,x^2\,d\,x$.

Следовательно, полная сумма равна

$$\int_0^{\zeta} 2\,\Pi\,x^2\,d\,x \qquad \text{или} \qquad \frac{2}{3}\,\Pi\,\zeta^3 \qquad \text{или} \qquad \frac{2}{3}\,A\,\zeta\ .$$

Следовательно, $f\,\frac{F}{A}\sum a\,x$ становится $f\,F\,\frac{2}{3}\,\zeta$;

и уравнение моментов есть

$$Q\,q = P\ p + f\ N'\,r' + f\ N''\,r'' + f\ F\,\frac{2}{3}\,\zeta\ .$$

Видно, что нужно уменьшать ζ насколько возможно, что достигается несколькими способами (фиг. 52 и 53); но есть предел, за которым давление $\frac{F}{A}$ на единицу поверхности, становясь слишком большим, материалы, находящиеся в контакте, рискуют быть поврежденными.

192. Если давление F, или, скорее, равная и противоположная ему реакция, упирается в буртик, $\frac{F}{A}$ все еще будет давлением на единицу поверхности. Пусть ζ и ζ' — радиусы наружной и внутренней окружностей кольца. Очевидно, что момент трения, вычисляя его, как выше, для радиуса ζ', а затем для радиуса ζ и вычитая первый результат из второго, находим

$$\frac{2}{3}\,\frac{f\,F\,\Pi\,(\zeta^3 - \zeta'^3)}{A}\ .$$

Но $A = \Pi\,\zeta^2 - \Pi\,\zeta'^3$. Следовательно, момент трения становится

$$\frac{2}{3}\,\frac{f\,F\,\Pi\,(\zeta^3-\zeta'^3)}{\Pi\,(\zeta^2-\zeta'^3)} \qquad \text{или} \qquad \frac{2}{3}\,\frac{f\,F\,(\zeta^2+\zeta\,\zeta'+\zeta'^2)}{\zeta+\zeta'}\ .$$

Если назвать ζ_1 средним радиусом, а l шириной кольца, имеем

$$\zeta+\zeta'=2\,\zeta \qquad \text{и} \qquad \zeta-\zeta'=l\ ;$$

и согласно этим соотношениям, получаем приближенно

$$f\,F\left(\zeta_1+\frac{1}{12}\,\frac{l^2}{\zeta_1}\right).$$

Если, помимо сил *П, P, Q* пункта 185, имеется сила F (фиг. 55), параллельная оси и на расстоянии d от этой оси, можно, не изменяя реакций опор, ввести две силы F_1 и F_2, равные между собой и силе F и действующие в противоположных направлениях вдоль оси; затем заменить пару $F_1\,F_2$ эквивалентной парой F', F'', расположенной в той же плоскости. Силы F' и F'' для эквивалентности пар должны удовлетворять соотношению

$$F'\,.\,\overline{A'\,A''}=F\,d\ .$$

Получаем тогда три системы сил, а именно:

1° в плоскости, перпендикулярной оси, в A': Π', P', Q', F', N', fN'; плюс трения на торце цапфы или на буртике.

2° в плоскости, перпендикулярной оси, в A'': Π'', P'', Q'', F'', N'', fN'';

3° вдоль оси: F_1, равная F, и равная и противоположная реакция.

Равнодействующая этой последней системы равна нулю, нужно, как в пункте 105, чтобы равнодействующая переносного движения каждой из двух других систем была равна нулю отдельно и независимо от трения на торце или на буртике, которые сводятся к паре. Называя S' и S'' равнодействующими переносного движения сил $\Pi'\,,\,P'\,,\,F'$ с одной стороны и $\Pi''\,,\,P''\,,\,F''$ с другой, получим два уравнения, подобные [1] и [2] пункта 185. Затем, в зависимости от того, предотвращается ли переносное движение ворота в направлении его оси плоскостью, упирающейся в торец цапфы или в её буртик, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} &Q\,q=P\,p+f_1\,r'\sqrt{R'^2}+f_1\,r''\sqrt{R''^2}+\frac{2}{3}\,f\,\zeta\,F \\ \text{или}\quad &Q\,q=P\,p+f_1\,r'\sqrt{R'^2}+f_1\,r''\sqrt{R''^2}+f\,F\left(\zeta_1+\frac{1}{12}\,\frac{l^2}{\zeta_1}\right) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ [\,3\,]$$

Уравнения [1], [2], [3] дают средство определить интенсивность Q, когда известно её направление. Вместо того чтобы действовать исключением, удобнее сначала принять для Q приближенное значение $\frac{P\,p}{q}$, вытекающее из гипотезы, где трение равно нулю, подставить это значение или немного большее число в [1] и [2]; из этого можно сделать вывод о приближенных значениях $\sqrt{R'^2}$ и $\sqrt{R''^2}$, которые, введенные в [3], дадут значение, достаточно приближенное к Q. Если бы хотели получить большее приближение, перенесли бы последнее в [1] и [2]; значения $\sqrt{R'^2}$ и $\sqrt{R''^2}$ из которых

получили бы, подставленные в [3], значение Q, очень мало отличающееся от предыдущего и от истинного.

Можно также воспользоваться теоремой г-на Понселе (189); для этого заменяют все силы P', F', Q' и т. д. их горизонтальными и вертикальными составляющими; тогда равнодействующие R', R'' точно вида $\sqrt{x'^2+y'^2}$, $\sqrt{x''^2+y''^2}$ сведутся приближенно к $\alpha x'+\beta y'$ и $\alpha x''+\beta y''$; и уравнение [3] окончательно сведется к уравнению первой степени относительно Q.

194.(*) Направление Q всегда задано, можно определить его интенсивность для случая, когда движение происходило бы в направлении, противоположном этой силе, P тогда была бы движущей силой, а Q — силой сопротивления. Обозначим через Q_1 значение Q для этого случая, через R'_1 и R''_1 соответствующие значения R' и R''; уравнения [1], [3], [4] сохранятся, заменяя там Q, R', R'' на Q_1, R'_1, R''_1; но вместо уравнения [3] будем иметь

$$\left.\begin{aligned} Q_1 q &= P\ p - f_1 r'\sqrt{R'^2_1} - f_1 r''.\sqrt{R''^2_1} - \frac{2}{3} f \zeta F \\ \text{или}\qquad Q_1 q &= P\ p - f_1 r'\sqrt{R'^2_1} - f_1 r''\sqrt{R''^2_1} - f F\left(\zeta_1 + \frac{1}{2.}\frac{l^2}{\zeta_1}\right) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots [\,3\,]$$

в обычных случаях, где величины f, r', r'' малы, R' и R'' мало отличаются от R'_1 и R''_1, и можно, вычитая [3 bis] из [3], записать

$$\frac{1}{2}\left(Q - Q_1\right) q = \underline{\text{ моменту трения}}\ .$$

Отсюда способ определить этот момент на опыте: достаточно установить наименьшую силу Q, необходимую при плече q, чтобы вращать ворот в одном направлении, и наименьшую силу Q_1, необходимую, чтобы предотвратить его вращение в противоположном направлении, а затем взять произведение $\frac{1}{2}(Q - Q_1)\, q$.

192. Если предположить, что ворот движется равномерно, установленные выше соотношения все еще сохранятся. Называя ω угловую скорость, путь, проходимый в единицу времени каждой точкой окружности, имеющей радиус p, будет $p\,\omega$; работа движущей силы и работа сопротивления за единицу времени будут, следовательно, выражаться как $Q\,.\,q\,\omega$ и $P\,.\,p\,\omega$. Таким образом, умножая на ω обе части уравнения [3], видим, что движущая работа равна работе сопротивления P плюс работа трения, которые предыдущие формулы дают средство вычислить.

193. Если бы сочленения весов были образованы цапфами, вращающимися в подпятниках примерно равного диаметра, предыдущая теория была бы к ним применима. Но поскольку эти сочленения выполняются с помощью ножей, трение имеет

(*) Здесь нет № 193. Непосредственно следуют новые 192, за которыми следуют 193 и новые 194 (с разным содержанием), следуют напрямую.

место не со скольжением, а только с качением и становится очень мало заметным, если контактирующие тела тверды и отполированы.

194. Цапфы на роликах. *Цапфа A (фиг. 56), несущая нагрузку P, опирается на два ролика или катка, которые могут вращаться на своих цапфах B и B′.* Чтобы рассмотреть только очень простой случай, предполагается, что направление P, проходящее через центр A, равноудалено от плоскостей двух катков, делит угол BAB' на две равные части. Требуется, какова сила Q, действующая на расстоянии q от оси A, будет на грани того, чтобы заставить главное тело вращаться вокруг цапфы A.

Если бы сила Q не действовала, катки получали бы и оказывали бы каждый в точках C и C' одинаковое давление N, и, называя 2α угол BAB', имели бы

$$P = 2\ N \cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\ 1\ ]$$

Сила Q должна быть мала; для упрощения допустим, что её действие не изменяет заметно давления N; кроме того, пренебрежем трением качения, то есть предположим, что давления N продолжают проходить через A. Приняв это, пусть r, a, ρ — радиусы цапфы A, катков и их цапф B и B'; пусть φ — касательное сопротивление, оказываемое каждым катком; получим уравнение моментов

$$Q\ q = 2\ \varphi\ r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\ 2\ ]$$

Каток B находится в равновесии под действием касательной силы к его окружности, равной и противоположной силе φ, нормальной силы N вдоль CB и реакции подшипника на цапфу. Следовательно, называя R равнодействующую сил φ и N, имеем

$$R^2 = \varphi^2 + N^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\ 3\ ]$$

и

$$\varphi\ a = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\ R\ \rho \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\ 4\ ]$$

эти два уравнения вместе с двумя предыдущими [1] и [2] содержат решение задачи. Чтобы получить его приближенно, заметим, согласно [4], что φ очень мало по сравнению с R, что, следовательно, согласно [3], R практически равно N; таким образом, уравнение [4] становится приближенно $\varphi\ a = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\ N\ \rho$. Подставляя значения N и φ, полученные из [1] и [2], получаем

$$Q\ q = \frac{f\ P\ r}{\sqrt{1+f^2}} \cdot \frac{\rho}{a} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}\ .$$

в то время как если бы цапфа A вращалась в неподвижном подшипнике, имели бы, предполагая q очень большим по сравнению с r,

$$Q\ q = \frac{f\ P\ r}{\sqrt{1+f^2}}\ .$$

Момент $Q\ q$ движущей силы должен, следовательно, быть тем меньше, чем больше a по сравнению с ρ и чем меньше угол α. Применение этого устройства предполагает, что

катки остаются точно цилиндрическими, что трудно при больших давлениях; а когда катки перестают вращаться, преимущества этого устройства становятся иллюзорными.

§: 5. Формулы, относящиеся к тяге повозок.

195. Для упрощения рассмотрим одно колесо, которое катится по горизонтальной поверхности и ступица которого охватывает ось, неизменно связанную с остальной частью экипажа. Назовем:

Q — равнодействующая вертикальных сил, приложенных к экипажу, исключая колесо, фиг. 57 и 58;

q — расстояние этой равнодействующей Q позади вертикали, проходящей через ось;

T — тяга, т. е. горизонтальная сила, приложенная к экипажу для поддержания равномерного движения;

h — высота точки приложения горизонтальной силы T над осью;

P — вес колеса, центр тяжести которого находится на оси колеса или втулки ступицы;

r — радиус колеса;

ρ — радиус втулки ступицы;

ρ' — радиус оси, немного меньший, чем ρ.

Колесо получает от грунта различные реакции, которые могут быть сведены к двум силам: одной горизонтальной, равной и противоположной T, которую мы назовем T', и другой вертикальной, равной $Q + P$, которую мы обозначим $Q' + P'$. Это следует из теоремы о движении центра тяжести любой материальной системы. Сила $Q' + P'$ может рассматриваться как приложенная к колесу в точке A', на расстоянии δ впереди вертикали OA, проходящей через ось колеса или втулки.

Приняв это, рассмотрим отдельно силы, действующие на колесо и удовлетворяющие условиям равновесия. Эти силы суть T', $Q' + P'$, P и действия оси на вогнутую поверхность втулки ступицы, действия, которые могут быть сведены к двум силам: одной нормальной N и другой касательной $f\ N$, направленной в сторону, противоположную вращению колеса (будет ли линия контакта оси и втулки находиться впереди или позади вертикали OA; ниже мы различим эти два случая).

Пять сил T', $Q' + P'$, P, N, $f\ N$ равны нулю для алгебраической суммы их моментов относительно любой оси. Возьмем для этой оси ось колеса или коробки, моменты P и N равны нулю и, поместив для T' и $Q' + P'$ их значения T и $Q + P$, получим

$$T\ r - (Q + P)\ \delta - f\ N\ \rho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots [\ 1\ ]$$

Кроме того, равнодействующая сил N и $f\ N$, прямоугольных, равна равнодействующей сил T, $Q' + P'$ и P, что, учитывая, что P и P' равны и противоположны, дает соотношение

$$N^2\ (1 + f^2) = T^2 + Q^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [\ 2\ ]$$

Теперь силы, действующие на экипаж, исключая колесо, суть Q, T и реакции, которые мы обозначим через N' и $f\,N'$, равные и противоположные рассмотренным выше силам N и $f\,N$. Их моменты, взятые относительно оси O' (оси, несущей экипаж), дают уравнение

$$Q\,q - T\,h - f\,N\,\rho' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots [\,3\,]$$

Равновесие тех же сил Q, T, N' и $f\,N'$ привело бы также к уже полученному уравнению [2].

196. С помощью трех приведенных выше уравнений, если предположить заданными величины Q, h, r, ρ', δ, f, определят T, q и вспомогательную неизвестную N. Из [2] получаем

$$f\,N = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\sqrt{T^2+Q^2} \qquad \text{или} \qquad f\,N = f_1\sqrt{T^2+Q^2}\,,$$

и подставляя в [1]

$$T = \left(Q+P\right)\frac{\delta}{r} + \frac{f_1\rho}{r}\sqrt{T^2+Q^2} \quad \ldots\ldots [\,4\,]$$

формула, в которой можно приближенно заменить $\sqrt{T^2+Q^2}$ на Q, так как T обычно мало по сравнению с Q.

197. Уравнение [3] при подстановке значения $f\,N$ становится

$$Q\,q = T\,h + f_1\,\rho'\sqrt{T^2+Q^2}\,,$$

откуда видно, что q не может быть нулевым или отрицательным, если только h не отрицательно.

198. Определим теперь положение линии контакта B оси и втулки. Предположим, что она находится впереди вертикали OA, фиг. 57, и назовем α угол AOB. Равновесие сил Q, T, N', f N' дает два уравнения между их проекциями:

$$\left.\begin{aligned} Q - N\cos\alpha + f\,N\sin\alpha = 0 \\ T - f\,N\cos\alpha - N\sin\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{откуда} \quad \sin\alpha = \frac{T - f\,Q}{\left(1+f^2\right)N} \quad \text{и} \quad \cos\alpha = \frac{Q + f\,T}{\left(1+f^2\right)N}\,.$$

Если бы B находилось позади вертикали OA, фиг. 58, называя α угол AOB, нашли бы два уравнения, подобных предыдущим, за исключением того, что члены, содержащие $\sin\alpha$, имели бы противоположные знаки. Следовательно, две последние формулы применимы к обоим случаям, при условии, что если $\sin\alpha$ становится отрицательным, угол α также отрицателен и точка B находится позади вертикали OA. Это имеет место, когда δ достаточно мало: при крайней гипотезе $\delta = 0$ формула [4] дает $T = \frac{f_1\rho}{r}Q$, величину, меньшую, чем $f\,Q$.

199. Мы ранее указали неопределенности, относящиеся к определению величины δ, которая, по Кулону и г-ну Морену, была бы почти независима от радиуса r, в то время

как по г-ну Дюпюи она была бы пропорциональна $\sqrt{r}$. Отсылаем к трудам этого автора по данному вопросу.

200. Предположим теперь, что грунт образует с горизонтом угол i и что движение является восходящим, а сила T составляет угол α выше параллели грунту. Касательная реакция грунта, направленная противоположно движению, обозначенная через T, равна

$$T_1 = T\cos\alpha - (Q+P)\sin i\,,$$

а её нормальная реакция N, выражается как

$$N_1 = (Q+P)\cos i - T\sin\alpha\,.$$

Приняв это, найдем два уравнения, подобные формулам [1] и [2] пункта 195, а именно:

1° уравнение моментов:

$$T_1 r - N_1\delta - f\,N\,\rho = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

2° уравнение, выражающее, что равнодействующая N и $f\,N$ равна равнодействующей сил T и Q, составляющих угол $\frac{\pi}{2}+\alpha+i$:

$$N^2\left(1+f^2\right) = T^2+Q^2-2\,T\,Q\sin(\alpha+i) \;\ldots\ldots\ldots [\,2\,]$$

Подстановка значений T_1 и N_1, а затем исключение N приводят к окончательному соотношению

$$T\cos\alpha = (Q+P)\sin i + \left((Q+P)\cos i - T\sin\alpha\right)\frac{\delta}{r} + \frac{f_1\,\rho}{r}\sqrt{T^2+Q^2-2\,T\,Q\sin(\alpha+2)}\,.$$

Г-н Морен в своем мемуаре о тяге повозок называет сопротивлением, оказываемым грунтом качению и отнесенным к окружности колеса, силу, которую он обозначает через R и которая, согласно приводимой им формуле, является величиной

$$\left((Q+P)\cos i - T\sin\alpha\right)\frac{\delta}{r}\,,$$

входящей в приведенное выше уравнение. В приложениях он принимает $f_1 = 0{,}065$.

§: 6. *О винте с прямоугольной резьбой.*

201. Предполагается, что гайка (фиг. 69) неподвижна, а на винт, помимо реакций гайки, действуют три силы: одна P, направленная вдоль оси (предполагаемой вертикальной), и две силы $\frac{1}{2}Q$ на расстоянии q от оси, образующие пару, плоскость которой перпендикулярна этой оси. Ищется соотношение между Q, P, q и размерами винта, когда равновесие вот-вот будет нарушено движущей силой Q, стремящейся поднять винт. Мы предположим, что контактирующие винтовые поверхности сведены к очень малой ширине, и обозначим через r их среднее расстояние до оси винта.

Пусть $\sum N$ — сумма нормальных составляющих реакций, оказываемых на винт винтовой поверхностью гайки, $f\sum N$ будет сумма их касательных составляющих, в направлении, противоположном движению, которое вот-вот должно возникнуть. Пусть i

— угол, который касательная винтовой линии составляет с горизонтом. Для выражения равновесия переносного движения, параллельного оси, будем иметь

$$\sum N \cos i - f \sum N \sin i - P = 0$$

и, принимая эту ось за ось моментов, получим также для равновесия

$$Q\,q - r \sum N \sin i - r\,f \sum N \cos i = 0$$

откуда получаем . . . . . $\sum N = \dfrac{P}{\cos i - f \sin i}$

и, следовательно . . $Q\,q\;P\,r\,\dfrac{\sin i + f \cos i}{\cos i - f \sin i} = P\,r\,\dfrac{\tan i + f}{1 + f \tan i}$ . . . . . [1]

Пример. $f = 0{,}12$; $\tan i = \frac{1}{25}$;

$$Q\,q = P\,r\,\frac{0{,}04 + 0{,}12}{1 - 0{,}0048} = 0{,}1608\,P\,r\,;$$

в то время как если бы трения не было, имели бы $Q\,q = 0{,}04\,P\,r$.

202. Называя h шаг винта, имеем $\tan i = \frac{h}{2\,\Pi\,r}$ и, следовательно,

$$Q\,q = P\,r\,\frac{h + 2\,\Pi\,r\,f}{2\,\Pi\,r - fh} \quad \ldots\ldots\ldots [\,2\,]$$

Если бы трением можно было пренебречь, имели бы, как указывают трактаты по статике и как видно непосредственно из теоремы о виртуальных перемещениях, $Q = \frac{P\,h}{2\,\Pi\,q}$ — величина, не зависящая от r; но для этого нужно было бы, чтобы в [1] f было очень мало по сравнению с $\tan i$, что никогда не реализуется. Может даже случиться, что Q станет больше любой задаваемой величины; это произошло бы, если бы $\tan i = \frac{1}{f}$; уравнение [1] дает тогда $Q = \infty$.

203. Если бы речь шла об определении силы P, способной опустить винт вопреки сопротивлению сил $\frac{1}{2}Q$, достаточно было бы в формуле [1] изменить знак f и решить относительно $P\,r$; нашли бы

$$P\,r = Q\,q\,\frac{1 + f \tan i}{\tan i - f}$$

откуда следует, что винт будет подчиняться силе P только при условии $\tan i > f$. На этом свойстве основано применение нажимных винтов.

204. также наличие трения обусловливает эффективность контргайки, которая обеспечивает неизменность соединения винта и его главной гайки; и которая играет роль, аналогичную роли конуса в некоторых шиповых и врезных соединениях.

205. В случае, когда $\tan i$ меньше f, можно спросить, каково должно быть значение каждой силы $\frac{1}{2}Q$, действующей в направлении спуска, чтобы винт был на грани опускания; достаточно в этом случае изменить одновременно знак Q и знак f в уравнении [1], и получим

$$Q\ q = P\ r\ .\ \frac{f - \tan i}{1 + f\ \tan i}\ .$$

206. Предыдущие уравнения сохраняются в случае, когда винт движется равномерно. За один полный оборот работа Q равна 2π q Q, а работа P, взятая абсолютно, равна P h. Имеем, следовательно,

$$\frac{\tau\{Q\}}{\tau\{P\}} = \frac{Q\ .\ 2\ \Pi\ q}{p\ h} = \frac{Q\ q}{P\ r} \qquad \frac{2\ \Pi\ r}{h} = \frac{Q\ q}{P\ r} \qquad \frac{1}{\tan i}\ .$$

Согласно уравнению [1],

$$\frac{\tau\{Q\}}{\tau\{P\}} = \frac{\tan i + f}{\tan i - f\ \tan^2 i} = 1 + \frac{f\left(1 + \tan^2 i\right)}{\tan i - f\ \tan^2 i} \ldots\ldots\ldots [\ 3\ ]$$

Это то, что можно было бы получить с помощью одного только уравнения [1], замечая, что отношение работ Q и P равно отношению этих сил, умноженному на постоянное число, которое определяется условием, что отношение работ становится равным единице, когда полагают $f = 0$.

Работа, потребляемая трением, относится, следовательно, к работе P, т. е. к полезному эффекту, в отношении, выраженном

$$\frac{f\left(1 + \tan^2 i\right)}{\tan i - f\ \tan^2 i}\ .$$

Обычно *tan i* — малое число, и тогда формула [3] приближенно сводится к

$$\frac{\tau\{Q\}}{\tau\{P\}} = 1 + \frac{f}{\tan i}\ .$$

Пример: $f = 0{,}12$; $\tan i = \frac{1}{25}$;

$$\tau\{Q\} = \tau\{P\}\left(1 + 0{,}12\ \frac{626}{24{,}88}\right) = 4{,}02\ \tau\{P\}\ ;$$

или приближенно . . . . . $\tau\{Q\} = 4\ \tau\{P\}$.

207. Отношение движущей работы Q к работе сопротивления P можно было бы уменьшить, увеличивая *tan i*.

Например, оставляя $f = 0{,}12$ и принимая $\tan i = 0{,}9$, получим

$$\frac{\tau\{Q\}}{\tau\{P\}} = 1 + \frac{0.12 \times 1.81}{0.9 - 0.12 \times 0.81} = 1{,}27\ .$$

Потеря из-за трения была бы, как видно, незначительна, так как она составила бы 27 сотых полезной работы; но момент усилия Q уже не был бы очень мал по сравнению с P r, и мы потеряли бы таким образом преимущество, которое ищут в винте; ибо имели бы

$$Q\ q = P\ r\ .\ 1{,}27 \times 0.9 = 1{,}143\ P\ r\ .$$

208. Во всем этом параграфе рассматривался только случай, когда на винт действует сила вдоль оси и пара, перпендикулярная этой оси. В любом другом случае пришлось бы рассматривать боковые трения, либо о гайку, либо о другие направляющие винта.

§: 7. Трение кривошипных пальцев или эксцентриков о их подшипники или втулки.

209. Кривошипный вал можно рассматривать как ворот, с той лишь разницей, что некоторые из сил, действующих на него, передаются через шатуны. Вопрос о равновесии такой системы с учетом трения не представил бы теоретических трудностей. Речь шла бы только о введении в расчеты взаимных действий контактирующих поверхностей, помня, что в момент, когда движение вот-вот возникнет, силы, получаемые одним телом от того, которое его касается, разлагаются на нормальные силы N и касательные силы $f N$, направление последних противоположно направлению движения первого тела относительно второго. Записали бы условия равновесия каждой детали системы, затем исключили бы неизвестные давления.

210. Мы ограничимся рассмотрением трения кривошипа в состоянии движения с точки зрения работы сопротивления, которую это трение развивает. В общем, когда два тела находятся в контакте и движутся, оказывая друг на друга молекулярные действия, полная работа, являющаяся результатом этих действий, зависит только от их интенсивностей и относительного движения двух тел; отсюда следует, что если привести одно из них в покой, изменяя абсолютное движение другого так, чтобы относительное движение не изменилось и чтобы взаимные действия остались теми же, работа, обусловленная этими действиями, не изменится.

211. Пусть O (фиг 60) — неподвижная ось вала. A — точка на оси подвижного пальца, описывающая окружность или дугу окружности вокруг O. Пусть A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2, ... — последовательные положения оси пальца; $A_0\ B_0$, $A_1\ B_1$, $A_2\ B_2$, ... — соответствующие направления шатуна; P_0, P_1 , P_2 , ... — усилия, которые шатун оказывает тогда на палец. Перенесем радиус OA_0 в Oa (фиг. 61); затем через точку a проведем ab_0 , ab_1, ab_2, ... , составляющие с ao углы b_0ao, b_1ao, b_2ao . . . . , равные углам B_0A_0O, B_1A_1O, B_2A_2O . . ., и опишем вокруг a окружность, представляющую палец кривошипа. Если мы предположим, что шатун принимает последовательно направления ab_0, ab_1, ab_2, ... , оказывая усилия P_0, P_1, P_2 на кольцо, охватывающее окружность, работа трения будет именно той, которую нужно вычислить.

Интенсивность трения в каждом положении равна $f P$; путь, пройденный точкой приложения этой силы сопротивления, состоит из элементов дуги b_0 , b_1 , b_2, ... , откуда заключаем, что работу получают, откладывая на оси абсцисс длины $b_0\,b_1$, b_1b_2 (фиг. 62), затем силы $f_1\ P_0$, f_1P_1 , f_1P_2 , ... по оси ординат и, наконец, вычисляя площадь построенной таким образом кривой.

212. В частном случае, когда шатун оставался бы параллельным самому себе и оказывал бы постоянное усилие P, работа трения за полный оборот кривошипа была бы, очевидно, $2 \Pi r . f_1 P$. Поэтому важно не увеличивать сверх необходимости радиус r пальца; поэтому не следует применять эксцентрики для передачи больших сил.

§: 8. *Смешанное трение качения и скольжения; зубчатые зацепления.*

213. Пусть MN (фиг. 63) — цилиндрическая поверхность, ограничивающая тело, предполагаемое неподвижным; пусть $ABCD$ — цилиндрическая поверхность, ограничивающая другое тело, которое движется, постоянно касаясь первого. Если бы в каком-либо втором положении подвижное тело оказалось в $A'B'C'D'$ (так что точки A, B, C, D были бы соответственно перенесены в A', B', C', D'), таким образом, что дуга BC' кривой MN имела бы ту же длину, что и дуга BC кривой $ABCD$, имело бы место простое качение; и, предполагая контактирующие тела твердыми и полированными, трением можно было бы обычно пренебречь. Но если второе положение есть $A''B''C''D''$, так что BC'' больше BC, имело бы место одновременно качение и скольжение, и разность между дугами BC'' и BC есть то, что называют дугой скольжения.

В этом случае допускают, не будучи, однако, уверенными, что это мнение подтверждено специальными опытами, что работа сопротивления или отрицательная работа, обусловленная взаимными действиями контактирующих тел, та же, как если бы подвижное тело перенеслось сначала простым качением из $ABCD$ в $A'B'C'D'$, а затем простым скольжением из $A'B'C'D'$ в $A''B''C''D''$. Из этого следует, что если пренебречь трением качения, называя R реакцию одного из тел на другое, N — её нормальную составляющую, $f N$ или, что то же самое $\frac{f R}{\sqrt{1+f^2}}$, где $f_1 R$ будет её касательной составляющей; и что отрицательная работа, обусловленная трением при переходе из $ABCD$ в $A''B''C''D''$, будет $f_1 R$ x $C'C''$.

Можно заметить, что если перемещение подвижного тела бесконечно мало, точки CB'' можно считать расположенными на MN, и имеем

$$C'C'' = BC'' - BC' = BC'' - BC = BC'' - B''C'' = BB''.$$

Таким образом, дуга скольжения есть элементарный путь, пройденный точкой B, рассматриваемой как принадлежащей подвижному телу, за очень малый промежуток времени, начиная с момента, когда эта точка находилась в контакте.

214. Одновременные качение и скольжение, вместо того чтобы быть одного направления, как в предыдущем примере, могут быть противоположных направлений. $ABCD$ (фиг. 64) — по-прежнему первое положение подвижного тела, а $A'B'C'D'$ — положение, которое оно заняло бы, если бы просто катилось по MN; второе положение может быть $A''B''C''D''$, причем одни и те же буквы с разными индексами по-прежнему представляют материальные точки подвижного тела. Могло бы даже случиться, что в то время как качение стремится переместить точку контакта вправо от точки B,

скольжение перемещает её влево. Как бы то ни было, все еще допускают, что отрицательная работа, обусловленная трением, выражается, как и в предыдущем случае, через $f_1\ R$ x $C'C''$, то есть она та же, как если бы тело, исходя из положения $A'B'C'D'$, перенеслось простым скольжением в $A''B''C''D''$; и если перемещение бесконечно мало, расстояние от B'' до кривой MN является бесконечно малой второго порядка, имеем $C'C'' = B'B''$.

215. Рассмотренная гипотеза, отличающаяся, на первый взгляд, от первой, однако в ней содержится; ибо, если предположить, что тело $ABCD$ неподвижно, а MN, став подвижным, занимает те же относительные положения, что и раньше, то видно, что в рамках пункта 213 качение и скольжение MN были бы противоположных направлений; в то время как в случае пункта 214 они были бы одного направления.

216. *Применение к зубчатым зацеплениям* — Колесо AB (фиг. 65) ведет колесо $A'B'$. Контакт происходит в T на линии центров и переходит в T', когда колеса продвигаются на один шаг. Если R — интенсивность взаимного действия контактирующих поверхностей, а a — длина шага TM или TM', работа, переданная ведомому колесу, очень мало отличается от $R\ a$, то есть от того, что было бы, если бы сила R действовала по касательной к начальной окружности. Отрицательная работа трения, зависящая от относительного движения, равна $f_1 R\ (MT' - TM')$ или $f_1 R$ x MM', причем точку M' можно считать расположенной на кривой MT. Дуги TM и TM' равны и, кроме того, предполагаются малыми по сравнению с их радиусами, ординаты LM, LM' очень мало отличаются друг от друга, и расстояние MM' может быть заменено на LL' или $TL + TL'$.

Но если назвать r и r' радиусы двух начальных окружностей, касающихся в T, и считать хорды TM, TM' совпадающими со стягиваемыми ими дугами, то есть равными шагу a, получим

$$TL = \frac{a^2}{2\,r}\ ,\ TL' = \frac{a^2}{2\,r'}\ ,$$

и работа трения становится

$$\frac{1}{2} f_1\, R\, a^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right);$$

таким образом, движущая работа, необходимая для передачи ведомому колесу работы R a и одновременного преодоления трения в зацеплении, равна

$$R\,a + \frac{1}{2} f_1\, R\, a^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right)$$

или

$$R\,a \left[1 + \frac{1}{2} f_1\, a \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \right]$$

или, называя τ движущую работу, а τ' работу, переданную второму колесу,

$$\tau = \tau' \left(1 + \frac{1}{2} f_1 a \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \right).$$

По этим формулам, принадлежащим г-ну Понселе и доказательство которых мы лишь упростили, исходя из гипотезы очень малого шага, видно, что работа, потребляемая трением, для заданных радиусов изменяется пропорционально шагу.

217. Если зацепление цилиндрическое, преобразуют эту формулу, вводя числа n и n' зубцов двух колес.

Имеем $a = \frac{2\,\Pi\, r}{n}$; $a = \frac{2\,\Pi\, r'}{n}$, откуда $\frac{a}{2\,r} = \frac{\Pi}{n}$; $\frac{a}{2\,r'} = \frac{\Pi}{n'}$

Отсюда $$\tau = \tau' \left[1 + f_1\, \Pi \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) \right].$$

Пример: $f\ 1 = 0{,}10$; $n = 20$; $n' = 40$; $f_1\, \Pi \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) = 0{,}024$.

218. Если зацепление коническое, фиг. 66, нужно, согласно замечанию г-на Понселе, сохранить формулу пункта 216, принимая за r и r' не радиусы CT и CT', а расстояния OT, $O'T$, отсчитываемые по перпендикуляру к образующей контакта AT, потому что кривые зубцов действительно соприкасаются в течение короткого промежутка времени так, как если бы они оставались в плоскости OO', перпендикулярной AT.

219. Вышеприведенные формулы предполагают, что зубцы соприкасаются только, начиная с линии центров, и что в каждый момент в зацеплении находится только один зубец на каждом колесе. Если, сохраняя это последнее предположение, допустить, что контакт начинается на полшага до линии центров и заканчивается на полшага после, то работа, обусловленная трением, уменьшится вдвое, в чем можно убедиться, заменив a на $\frac{1}{2}\,a$ и затем удвоив результат.

Но на практике лучше не рассчитывать на это уменьшение. Обычно контакт начинается на один шаг до линии центров и заканчивается на один шаг после; в этом случае всегда два зубца каждого колеса находятся в зацеплении, и установленные выше формулы сохраняются.

Впрочем, предыдущая теория не учитывает неточность изготовления колес и неизбежную деформацию зубцов, откуда возникают малые удары и потери работы, которые нужно добавлять к потерям на трение. Различные опыты по этому вопросу представляли бы большой интерес.

220. Мы только что рассмотрели трение зубчатого зацепления в случае очень малого шага и сказали, что полученная формула применима одинаково как в случае, когда контакт двух зубцов начинается на расстоянии одного шага от линии центров, так и в случае, когда он начинается на линии центров, при условии, что он всегда заканчивается на расстоянии одного шага от этой линии. Иначе обстояло бы дело, если бы зубцы

должны были входить в зацепление и выходить из него на большом расстоянии от линии центров.

Пусть 2 колеса (фиг. 67), зубцы которых MT', $M'T'$ соприкасаются в T'. Найдем условие равновесия между двумя силами Q, P и предположим, что Q — движущая сила; контакт в этом случае происходит после линии центров.

Колесо с центром C' находится в равновесии под действием силы P, нормальной реакции N' и касательной реакции $f\,N'$, направленной по $T'M'$ (см. фиг. 67); из условия моментов имеем

$$P\,r' - N'\,x' = 0\ .$$

Колесо с центром C находится в равновесии под действием силы Q, нормальной реакции N, равной N', и касательной реакции $f\,N$, направленной по $T'C'$; имеем, следовательно,

$$Q\,r - N\,x - f\,N\,y = 0\ .$$

Полагая $N' = N$ и исключая эту величину, находим

$$\frac{Q}{P} = \frac{r'}{r}\,\frac{x + f\,y}{x'} \qquad \text{или} \qquad \frac{Q}{P} = 1 + f\,\frac{y}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

замечая соотношение $\dfrac{r'}{r} = \dfrac{x'}{x}$.

Теперь предположим, напротив, что P — движущая сила. Контакт происходит тогда до линии центров, и единственное различие с предыдущим случаем будет в направлении касательных реакций, из которых одна $f\,N'$ будет направлена по $T'C'$, а другая $f\,N$ — по TM; так что уравнения будут:

$$P\,r' - N'\,x' = 0 \qquad \text{и} \qquad Q\,r - N\,x + f\,N\,y = 0$$

откуда $$\frac{P}{Q} = \frac{r}{r'}\,.\,\frac{x'}{x - f\,y} \qquad \text{или} \qquad \frac{P}{Q} = \frac{1}{1 - f\,\dfrac{y}{x}} \quad \ldots\ldots [\,2\,]$$

В обоих случаях отношение движущей силы к силе сопротивления больше единицы. Но во втором оно может стать гораздо больше, чем в первом. При крайней гипотезе $f\,\frac{y}{x} = 1$ получили бы $1 + f\,\frac{y}{x} = 2$, в то время как $\frac{1}{1 - f\,\frac{y}{x}}$ было бы ∞.

Отсюда заключаем, что возможно спроектировать два зубца зацепления, которые, удовлетворяя геометрическим условиям построения, не будут работать, когда их попытаются вращать в определенном направлении, то есть при начале контакта далеко от линии центров, пытаясь затем сблизить два зубца с этой линией. Имело бы место тогда то, что называют *заклиниванием*.

Этот эффект не имеет места, когда y мало по сравнению с x, и тогда две величины $\frac{1}{1 - f\,\frac{y}{x}}$ и $1 + f\,\frac{y}{x}$ практически равны, так как их отношение равно 1 к $1 + f^{2.}\,\frac{y^2}{x^2}$.

§: 9. О жесткости канатов.

221. Когда по подвижному вокруг своей оси *C* блоку (фиг. 68) проходит канат, натянутый на своих концах силами *P* и *Q,* опыт показывает, что как во время равномерного движения, так и в момент, когда движение вот-вот возникнет, движущая сила *Q* больше сопротивления *P* на величину, превышающую увеличение, обусловленное трением оси блока в его опорах.

Это превышение является эффектом жесткости каната и объясняется либо формой, которую принимает канат, из-за которой плечо силы сопротивления *P* больше плеча движущей силы *Q,* либо работой сопротивления, которую нужно преодолеть для изгибания каната. Из опытов Кулона (*Мемуары иностранных ученых*, том 10) следует, что, отвлекаясь от трения оси, избыток *Q - P* может быть представлен формулой

$$Q - P = \frac{A + BP}{D},$$

где *D* — диаметр блока, увеличенный на диаметр каната, *A* и *B* — две величины, не зависящие от *P* и *D*, но изменяющиеся с диаметром, природой каната (беленый или смоленый), его сухостью или влажностью, степенью изношенности.

Следующая таблица, вычисленная Навье, дает для некоторых канатов, испытанных Кулоном, значения *A* и *B*, подходящие, когда за единицу силы принимают килограмм, а за линейную единицу — метр. Эти канаты были образованы из трех прядей, а пряди — из определенного числа нитей, называемых каболками.

Таблица для расчета жесткости различных канатов вокруг блока диаметром один метр.

Обозначение канатов	Диаметр канатов	Вес канатов на метр длины	Постоянная жесткости A	Жесткость на килограмм сопротивления B
Беленые канаты из 30 нитей	0^{m},020	0^{K},283	0^{K},222	0,0097
" 15 "	0,014	0,145	0,064	0,0055
" 6 "	0,009	0,052	0,011	0,0024
Смоленые канаты из 30 нитей	0,024	0,333	0,350	0,0126
" 15 "	0,017	0,163	0,106	0,0061
" 6 "	0,010	0,069	0,021	0,0026

Из этой таблицы видно, что величины *A* и *B* не изменяются с толщиной каната по одному и тому же закону (*A* приблизительно пропорционально 4-й степени, а *B* — 2-й

степени диаметра); это доказывает неточность формулы, данной в этом отношении несколькими авторами на основании Кулона. Опыты, приведенные этим великим физиком, недостаточны, чтобы позволить ввести в формулу влияние износа каната. Что несомненно, так это то, что при равных диаметрах полуизношенный канат всегда имеет меньшую жесткость, чем канат в хорошем состоянии.

222. Согласно Навье (*лекции, 1-я часть*, стр. 43), среднее сопротивление канатов составляет от 5 до 6 килограммов на квадратный миллиметр сечения; но их не следует нагружать более чем на половину этого усилия.

223. Из формулы пункта 221 заключаем, что если r и r' обозначают расстояния от оси блока до осей двух прямолинейных частей каната, то

$$P\,r' = Q\,r \qquad \text{или} \qquad P\,r' = P\,r + \frac{1}{2}(A + BP),$$

так как r очень мало отличается от $\frac{1}{2}D$.

224. Условие для равновесия или равномерного движения блока с учетом трения оси. Назовем:

r — радиус ручья блока, увеличенный на радиус каната;

r' — расстояние от оси фигуры блока до оси той части каната, к которой приложено сопротивление P;

f — радиус оси, если она закреплена в блоке; если ось принадлежит обойме,

ρ — радиус отверстия блока;

R — полная наклонная реакция, которую блок получает от своих опор; N и fN — её составляющие.

Пренебрегая весом блока, имеем

$$R = N\sqrt{1+f^2} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2\,P\,Q\cos(P\,,\,Q)}$$

и

$$Q\,r = P\,r' + f\,N\,\rho\,.$$

Отсюда и из формулы пункта 223 заключаем

$$Q = P + \frac{1}{2\,r}(A + BP) + f_1\frac{\rho}{r}\sqrt{P^2 + Q^2 + 2\,P\,Q\cos(P\,,\,Q)}\,.$$

В частном случае, когда силы P и Q параллельны, эта формула становится

$$Q = \frac{1}{r - f_1\rho}\left(\frac{1}{2}A + \left(r + \frac{1}{2}B + f_1\rho\right)P\right)$$

Это уравнение вида $Q = \alpha + \beta P$.

225. Расчет талей или полиспастов, пренебрегая весом каната, весом блоков, боковым трением их и предполагая блоки равными, а канатные ветви практически параллельными (фиг. 69). Пусть $T_1, T_2, \ldots, T_n$ — натяжения ветвей, не считая той, на которую действует движущая сила Q; r — радиус каждого блока, увеличенный на

радиус каната; ρ — радиус отверстий блоков; α и β — функции, определенные, как выше, из известных величин r , ρ , A , B et f_1 . Будем иметь

$$T_2 = \alpha + \beta\, T_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \alpha\,\frac{\beta - 1}{\beta - 1} + \beta\, T_1$$

$$T_3 = \alpha + \beta\, T_1 = \alpha\,(1+\beta) + \beta^2\, T_1 \ldots\ldots\ldots = \alpha\,\frac{\beta^2 - 1}{\beta - 1} + \beta^2\, T_1$$

$$T_4 = \alpha + \beta\, T_2 = \alpha\,(1+\beta+\beta^2) + \beta^2\, T_1 \ldots\ldots\ldots = \alpha\,\frac{\beta^3 - 1}{\beta - 1} + \beta^4\, T_1$$

- -

$$T_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \alpha\,\frac{\beta^{n-1} - 1}{\beta - 1} + \beta^{n-1}\, T_1$$

$$Q = \alpha + \beta\, T_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \alpha\,\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1} + \beta^n\, T_1$$

Кроме того, $$P = T_1 + T_2 + \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ + T_n\ .$$

Помещая во главе этих уравнений равенство $T_1 = \alpha\,\frac{1-1}{\beta-1} + 1\, T_1$ и складывая все n натяжений от T_1 до T_n, получим

$$P = \frac{\alpha}{\beta - 1}\left(\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1} - n\right) + \frac{\beta^n - 1}{\beta - 1}\, T_1\ .$$

Исключая T_1 между этим уравнением и уравнением, дающим значение Q, находим

$$Q = \alpha\left(\frac{n\,\beta^n}{\beta^n - 1} - \frac{1}{\beta - 1}\right) + \frac{(\beta - 1)\,\beta^n}{\beta^n - 1}\, P\ .$$

Если бы отвлечься от трения и жесткости, имели бы

$$Q = \frac{P}{n}\ .$$

226. Пример, взятый из литографированного курса г-на Понселе.

Две системы по четыре блока; $n = 8$; $D = 0{,}1006$; $d = 0{,}018$, откуда $r = 0{,}0593$; $\rho = 0{,}0105$; $f = 0{,}155$ (медь по железу без смазки), откуда $f_1 = 0{,}153$.

Находят $\alpha = 1{,}6039$; $\beta = 1{,}1267$; $Q = 12^{Kil\,,18} + 0{,}288\ P$. Если бы пренебречь трением и жесткостью, следовало бы иметь

$$Q = 0{,}125\ P\ .$$

Пути, проходимые одновременно точками приложения сил P и Q, находятся в отношении 1 к n. Из этого следует

$$\tau\,\{\,P\,\} :\ \tau\,\{\,Q\,\} ::\ P\ :\ n\,Q\ .$$

Видно по предыдущей формуле, что это отношение не постоянно. В приведенном выше примере имеем

$$\tau\,\{\,P\,\} :\ \tau\,\{\,Q\,\} ::\ P : 8\,Q\ , \qquad \text{то есть} \qquad :: P : 97^K\ ,\ 44 + 2{,}304\ P\ .$$

В зависимости от того, будет ли P равно 200 или 2000 килограммов, это отношение работ будет как 1 к 2,79 или 1 к 2,35.

§: 10. *Трение каната или ремня о неподвижный цилиндр.*

227. Рассмотрим сначала участок правильной призмы M_0 , M_1, и т. д. (фиг. 70), прижатой посредине своих граней телами, связанными между собой нитями, перпендикулярными радиусам OM_0 , OM_1 и т. д., и проходящими соответственно через точки M_0 , M_1 и т. д. Первая из этих нитей имеет натяжение, равное сопротивлению P; спрашивается натяжение Q последней в момент, когда движение вот-вот возникнет в направлении Q .

Пусть (фиг. 71) T — натяжение нити, проходящей в M, $T+\Delta T$ — натяжение нити, проходящей в M'; α — половина угла MOM'; N — реакция, перпендикулярная грани MM', $f\ N$ — соответствующее трение. Имеем, рассматривая составляющие натяжений в направлении MM' и в направлении ON:

$$f\ N = \Delta T\ .\ \cos\alpha \qquad \text{и} \qquad N = (2\ T + \Delta T)\sin\alpha$$

откуда, исключая N, $$\Delta T = \frac{2\ f\ T\ \tan\alpha}{1 - f\ \tan\alpha}\ .$$

Когда α очень мал, можно пренебречь $f\ tan\ \alpha$ по сравнению с единицей; и если обозначить через ΔS длину MM', можно заменить в числителе $tan\ \alpha$ на $\frac{\frac{1}{2}\Delta S}{r}$, тогда приходит

$$\Delta T = \frac{f\ \Delta S}{r}\ .\ T\ .$$

Чтобы перейти от рассмотренного случая к случаю каната, скользящего по цилиндру, достаточно сделать ΔT и ΔS бесконечно малыми и положить

$$\frac{d\ T}{T} = \frac{f\ d\ s}{r}\ ,$$

откуда интегрированием между пределами 0 и s, которые соответствуют значениям P и Q натяжения T, где s обозначает полную обхватываемую канатом дугу,

$$\log\frac{Q}{P} = \frac{f\ s}{r}\ logs\ , \qquad \text{или} \qquad \frac{Q}{P} = (2.71828)^{\frac{f\ s}{r}}\ .$$

228. *Замечание*. Отношение $\frac{Q}{P}$ не зависит от дуги s, а только от отношения $\frac{s}{r}$ и от числа градусов обхватываемой дуги. Из этого следует, что формула применима к любому цилиндру, и в ней заменяют $\frac{s}{r}$ на дугу окружности, которая, имея *радиус = 1*, измеряет угол между двумя крайними нормалями к обхватываемой дуге. Если m — число градусов этого угла, подставляемое значение $\frac{s}{r}$ будет $\frac{m\ \Pi}{180}$.

229. Согласно опытам г-на Морена, трение ремней, по-видимому, не зависит от их ширины; и имеем

f = 0,47 для обычных ремней по деревянному барабану;

f = 0,50 для новых ремней по деревянному барабану;

f = 0,28 для обычных ремней по чугунным шкивам;

f = 0,38 для влажных ремней по чугунным шкивам;

f = 0,50 для пеньковых канатов по деревянным шкивам.

230. Согласно тому же автору, можно без риска допускать для кожаного ремня натяжение 0,25 кг на квадратный миллиметр сечения.

§:11. *О передаче движения с помощью бесконечных канатов или ремней.*

231. Два тела, вращающиеся вокруг осей A и A' (фиг. 72), несут шкивы, на которые намотан бесконечный канат или ремень, надлежащим образом натянутый. Силы Q и P приложены соответственно к двум телам. Требуется найти условия равновесия в момент, когда движение вот-вот возникнет в направлении движущей силы Q, с учетом трения в цапфах A и A' и отвлекаясь от жесткости ремня, которая обычно мало ощутима. Для простоты предполагают силы P и Q вертикальными, а ремень — практически горизонтальным между двумя шкивами.

Если ремень натянут достаточно, чтобы не скользить ни на одном из двух шкивов, обозначая через T и t натяжения двух ветвей ремня, R и R' — радиусы шкивов, ρ, ρ' — радиусы цапф, p и q — плечи сил P и Q, получим:

для шкива A: $$Q\,q-(T-t)\,R-f_1\,\rho\,\sqrt{Q^2+(T+t^2)}=0 \quad \ldots\ldots [\,1\,]$$

для шкива B: $$(T-t)\,R'-P\,p-f_1\,\rho'\,\sqrt{P^2+(T+t)^2}=0 \quad \ldots [\,2\,]$$

Чтобы ремень не скользил ни на одном из двух шкивов, необходимо, чтобы отношение $\frac{T}{t}$ было меньше значения, вычисленного в пункте 227 для случая, когда скольжение вот-вот возникнет. Таким образом, нужно иметь одновременно

$$\frac{T}{t} < e^{\frac{f\,S}{R}} \quad \text{и} \quad \frac{T}{t} < e^{\frac{f\,S'}{R'}},$$

где S и S' — дуги, охватываемые ремнем на шкивах A и A'. В общем, правые части этих неравенств могут различаться по двум причинам: либо потому, что углы, выражаемые как $\frac{S}{R}$ и $\frac{S'}{R'}$, различны, либо потому, что материал шкивов не одинаков, коэффициент трения f не имеет одного и того же значения в обоих случаях. В гипотезе условия имеем

$$\frac{S}{R}=\frac{S'}{R'}=\Pi,$$

но коэффициент f может быть не одинаков.

Пусть m — меньшая из правых частей предыдущих неравенств, следует положить

$$\frac{T}{t} < m \qquad \text{или} \qquad T = K\, m\, t \ldots\ldots\ldots [\,3\,]$$

где K меньше единицы и тем меньше, чем более аппарат подвержен толчкам. Если этого обстоятельства нет, принимают $m \approx 0{,}9$.

Уравнения [1], [2], [3] дают решение задачи.

Уравнений [1] и [2] было бы достаточно, если бы сумма $T + t$ натяжений была задана *a priori*.

232. Сумма $T + t$ двух натяжений остается постоянной в течение всего времени движения. Это следует из того, что упругое тело призматической формы, подвергнутое растягивающему усилию вдоль своей длины, испытывает удлинение, пропорциональное этому усилию и его первоначальной длине, если только усилие не настолько велико, чтобы упругость материала была нарушена.

Пусть T' — общее натяжение двух ветвей, каким оно было бы, если бы силы P и Q еще не действовали; пусть L — общая длина этих двух ветвей, молекулы которых были бы тогда в одном и том же состоянии раздвижения; пусть λ — длина, которую имела бы каждая из этих ветвей в их естественном состоянии, т. е. если бы они не были натянуты. Удлинение $L - \lambda$ будет соответствовать натяжению T', и будем иметь

$$L - \lambda = a\, \lambda\, T' \ldots\ldots [\,1\,]$$

обозначая через a удлинение, которое сила в 1 кг дает 1 м ремня.

Когда натяжение становится T для одной из ветвей, пусть l — новое приращение её длины; имеем аналогично

$$L + l - \lambda = a\, \lambda\, T \ldots\ldots [\,2\,]$$

и приращение l переходит на ведущий шкив.

Но в то же время часть ремня, образующая вторую ветвь, сохраняет в своем новом состоянии длину L только благодаря добавлению величины l, которая сматывается с ведущего шкива. Натяжение t соответствует удлинению $L - l - \lambda$:

$$-l - \lambda = a\, \lambda\, t \ldots\ldots [\,3\,]$$

Из уравнений [1], [2], [3], складывая сначала два последних, получаем $T + t = 2\,T'$.

Следовательно, сумма $T + t$ натяжений та же в любой момент, что и в момент, когда шкивы еще не подвергались действию сил P и Q, то есть равна удвоенному начальному натяжению одной из ветвей.

Можно регулировать начальное натяжение ремня либо изменяя его длину до тех пор, пока он не будет надлежащим образом натянут, либо с помощью устройства, позволяющего произвольно раздвигать оси шкивов. Вообще следует избегать натягивать ремень значительно сильнее, чем нужно, потому что равнодействующая двух натяжений создает давление на каждую из осей и, следовательно, приводит к возрастанию трения.

233. Независимо от изменений натяжения, обусловленных движением, ремень претерпевает еще другие, зависящие от гигрометрического состояния атмосферы. Для устранения этого применяют натяжной шкив (фиг. 73).

Пусть N — усилие, оказываемое натяжным роликом, и α — тупой угол, образуемый двумя частями ремня, на который он действует. Сила N, будучи приблизительно направлена по биссектрисе угла α, а T — натяжение двух частей ветви ремня, на которую действует ролик, имеем приближенно

$$2\,T\cos\frac{1}{2}\,\alpha = N\ ,$$

соотношение, которое позволяет вывести T из N, или N из T.

234. Плоскоременные шкивы не цилиндричны, а слегка выпуклы; таким образом, ремень немного более натянут посередине, чем по краям, что сохраняет его правильное положение. Выпуклости двух неравных по диаметру шкивов, находящихся в передаче, должны быть пропорциональны радиусам, чтобы скорости были равны на любых двух окружностях, расположенных на обоих шкивах в одной плоскости, перпендикулярной осям. Средняя выпуклость двух шкивов составляет около $\frac{1}{10}$ их ширины.

235. Бесконечный ремень, находясь в движении, если сопротивление P возрастет настолько, что соотношение $\frac{T}{t} < m$ из пункта 231 больше не выполняется, ремень будет скользить. В лесопильных рамах, когда пила встречает сучок, если мощность живого действия, которой обладает пила, достаточно велика, чтобы равняться избытку работы, требуемой для распиловки этого сучка, пила преодолеет препятствие, замедляясь, а затем снова наберет свою первоначальную скорость; но если мощность живого действия пилы недостаточна, она остановится. Рабочий, предупрежденный этим перерывом, сможет, нажав на натяжной ролик, сообщить пиле необходимое увеличение давления, чтобы преодолеть препятствие без риска сломать пилу.

Если требуется, чтобы механизм не мог ни остановиться, ни замедлиться, нужно заменить ремни зубчатыми зацеплениями. В этом последнем устройстве мощность живого действия, приобретенная всей системой, служит для преодоления временного возрастания сопротивления без заметного уменьшения скорости. Можно было бы достичь той же цели, увеличивая натяжение бесконечных ремней, но это влечет за собой серьезное неудобство: создает иногда значительное трение в цапфах вращающихся валов.

Если не хотят чрезмерно увеличивать натяжение ремня, нужно по крайней мере, чтобы машина, которой он передает движение, обладала благодаря своей массе и скорости достаточно большой мощностью живого действия, чтобы временное увеличение результирующей работы сопротивления мало влияло на скорость этой машины. Эти соображения относятся к теории маховиков, изложенной в следующей главе.

Глава 5. *О переменном движении твердых тел, вынужденных вращаться вокруг неподвижных осей.*

§: 1 Вычисление углового ускорения.

236. На твердое тело действуют внешние силы F, угловая скорость которого в некоторый момент равна ω и по прошествии очень малого времени dt принимает другое значение $\omega + d\omega$.

Величина $\frac{d\omega}{dt}$ есть *угловое ускорение*, которое требуется определить.

Пусть M (фиг. 71) — точка массой m, находящаяся на расстоянии r от оси вращения Oz. Её скорость в рассматриваемый момент равна ωr; её ускорение равно $\frac{r\,d\omega}{dt}$. Эта точка движется, следовательно, так, как если бы, будучи свободной, она подвергалась действию двух сил: одной φ, касательной к описываемой оси, равной $m r \frac{d\omega}{dt}$, и другой ψ, центростремительной, равной $m \omega^2 r$.

Приняв это, представим, что, ничего не меняя в действующих силах, мы приложим к точке M четыре новые силы, а именно φ и ψ, определенные выше, и φ и ψ, равные и противоположные первым. Сделаем то же для всех точек вращающегося тела; ничто не изменится в его движении, ни во взаимных действиях всех его частей.

В этом состоянии точка движется так, как если бы на неё действовали только силы φ и ψ; следовательно, другие силы F, φ и ψ и молекулярные действия, относящиеся к точке M, взаимно уравновешиваются. То же самое для всех материальных точек твердого тела.

Силы F, φ и ψ, относящиеся ко всем этим точкам, удовлетворяют, следовательно, общим условиям равновесия(*), и в частности уравнению моментов, взятому относительно оси Oz. Относительно этой оси момент каждой из сил ψ равен нулю, и остается

$$\sum M\{F\}_z = \sum \varphi r, \qquad \text{или} \qquad \sum M\{F\}_z = \frac{\sum d\omega}{dt} . m r^2,$$

откуда
$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum M\{F\}_z}{\sum m r^2}$$

поскольку в рассматриваемый момент угловое ускорение $\frac{d\omega}{dt}$ обще всем элементам m твердого тела.

Заключаем, что <u>угловое ускорение равно сумме моментов внешних сил относительно оси вращения, деленной на момент инерции системы относительно той же оси</u>.

237. <u>Частный случай</u>. Может случиться, что $\sum M\{F\}_z = 0$, как, например, когда тело, подверженное только действию силы тяжести, вращается без трения вокруг оси, проходящей через его центр тяжести, или вокруг любой вертикальной оси. Тело

(*) Это очень простое наблюдение, распространенное на любую материальную систему, обладающую каким-либо движением, составляет, по сути, <u>общий принцип динамики</u> Д'Аламбера.

сохраняет тогда без изменения начальное вращательное движение, так как $\frac{d\omega}{dt}$ постоянно равно нулю.

Но из этого не следует заключать, что каждая точка в этом случае находится в динамическом равновесии; напротив, для каждой точки существует центростремительная сила, являющаяся равнодействующей всех сил, действующих на эту точку; и если для данной угловой скорости молекулярные действия, оказываемые на элемент системы, недостаточны для создания этой равнодействующей, произойдет разрыв между этим элементом и остальной частью системы.

§:2. Давление на опоры.

238. Можно задаться целью определить давления, которые испытывают в каждый момент опоры оси вращения, или, что то же самое, найти усилия, которые опоры оказывают на вращающееся тело.

Предположим, что эти опоры состоят из двух колец A и A' (фиг. 72), охватывающих ось, и плоскости p, которая препятствует переносному движению в направлении оси; усилия, которые требуется вычислить, сведутся к пяти силам, параллельным трем координатным прямым Ox, Oy, Oz: а именно X, Y — составляющие сопротивления кольца A; X', Y' — аналогичные силы для кольца A' и Z, направленная вдоль оси. Эти силы должны входить в общее обозначение внешних сил F, рассматриваемых в пункте 236; но если ограничить это обозначение другими внешними силами, необходимо, чтобы силы φ и ψ удовлетворяли шести условиям равновесия:

1° Переносное движение (фиг. 73):

$$\sum F_x + X + X' + \sum \varphi \sin\alpha + \sum \psi \cos\alpha = 0$$
$$\sum F_y + Y + Y' - \sum \varphi \cos\alpha + \sum \psi \sin\alpha = 0$$
$$\sum F_x + Z = 0$$

2° Моменты: . . . . . выполняя $OA = \xi$, $OA' = \xi'$ и рассматривая моменты сил, действующих в направлении ускорения, как положительные $\frac{d\omega}{dt}$

$$\sum M\{F\}_x - \sum \varphi\, r = 0$$
$$\sum M\{F\}_x + Y\,\xi + Y'\,\xi' - \sum x\,\varphi\cos\alpha + \sum x\,\psi\sin\alpha = 0$$
$$\sum M\{F\}_y + X\,\xi + X'\,\xi' + \sum x\,\varphi\sin\alpha + \sum x\,\psi\cos\alpha = 0$$

Но, заметив, что имеем (рис. 73)

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin\alpha = \frac{y}{r} \quad , \quad \varphi = m\,r\,\frac{d\omega}{dt} \quad , \quad \psi = m\,\omega^2\,r$$

эти шесть уравнений можно записать следующим образом

$$\sum F_x + X + X' + \frac{d\omega}{dt}\sum m\,y + \omega^2 \sum m\,x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

$$\sum F_y + Y + Y'' + \frac{d\omega}{dt}\sum m\,y + \omega^2 \sum m\,y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,2\,]$$

$$\sum F_x + Z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,3\,]$$

$$\sum M\{F\}_x - \frac{d\omega}{dt}\sum m\,r^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,4\,]$$

$$\sum M\{F\}_y + Y\,\xi + Y'\,\xi' - \frac{d\omega}{dt}\sum m\,x\,z + \omega^2 \sum m\,y\,x = 0 \quad \ldots [\,5\,]$$

$$\sum M\{F\}_x + X\,\xi + X'\,\xi' + \frac{d\omega}{dt}\sum m\,y\,x + \omega^2 \sum m\,y\,x = 0 \quad \ldots [\,6\,]$$

Уравнение [4] — это то, которое служило в пункте 236 для определения углового ускорения $\frac{d\omega}{dt}$; пять других послужат для определения пяти величин X, Y, X', Y' и Z.

239. Если использовать эти уравнения для определенного момента, можно выбрать плоскость zOx так, чтобы она проходила через положение центра тяжести системы в этот момент. В этом случае имеем $\sum m\,y = 0$, и если обозначить через a расстояние от центра тяжести до оси Ox, а через M полную массу тела, то $\sum m\,x = M\,a$, и получим

$$\sum F_x + X + X' + \omega^2\,M\,a = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,1\text{ bis}\,]$$

$$\sum F_y + Y + Y' - \frac{d\omega}{dt}\,M\,a = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,2\text{ bis}\,]$$

Можно заметить, что $\omega^2\,M\,a$ — это выражение центробежной силы, а $\frac{d\omega}{dt}\,M\,a$ — выражение касательной силы, которые соответствовали бы массе M, предположительно сосредоточенной в центре тяжести, без изменения вращательного движения.

Видно из уравнения [3], что давление Z в направлении оси то же во время движения, что и если бы система находилась в покое. Не так обстоит дело с суммами $X + X'$ и $Y + Y'$; первая, согласно уравнению [1 bis], зависит от текущей угловой скорости ω, а вторая, согласно уравнению [2 bis], зависит от углового ускорения $\frac{d\omega}{dt}$.

240. 1° Применение предыдущих формул к телу, вращающемуся вокруг вертикальной оси (оси x), без действия силы тяжести и одной или нескольких горизонтальных пар.

Имеем в этом случае $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_x = P = M\,g$, $\sum M\{F\}_x = 0$, $\sum M\{F\}_y = 0$

Следовательно, уравнения [1 bis], [2 bis], [3], [4], [5] и [6] становятся

$$X + X' + \omega^2 M \alpha = 0$$

$$Y + Y' - \frac{d\omega}{dt} M \alpha = 0$$

$$M g + Z = 0$$

$$\sum \{F\}_x - \frac{d\omega}{dt} \sum m r^2 = 0$$

$$Y \xi + Y' \xi' + \omega^2 \sum m y \alpha - \frac{d\omega}{dt} \sum m x \alpha = 0$$

$$X \xi + X' \xi' + \omega^2 \sum m x \alpha - P a = 0$$

Если бы требовалось, чтобы горизонтальные давления *X, X′, Y, Y′* были равны нулю, необходимо было бы не только $a = 0$, т. е. чтобы ось вращения проходила через центр тяжести, но также чтобы $\sum m y \alpha = 0$ и $\sum m x \alpha = 0$. Это соображение объясняет, как жернов мельницы может быть горизонтален в состоянии покоя и терять это положение, когда он вращается; две последние формулы указывают способ исправить этот недостаток, вводя в вертикальные отверстия металлические массы, положение которых регулировалось бы экспериментально.

2° Другое применение, к телу, подверженному исключительно силе тяжести и вращающемуся вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр тяжести.

Принимая ось *x* горизонтальной, имеем $F_x = 0$, $F_\alpha = 0$, $\sum F_y = P$, $a = 0$, $\sum M \{F\}_x = 0$, $\sum M \{F\}_y = 0$, $\sum M \{F\}_\alpha = 0$.

Следовательно, вышеуказанные уравнения становятся

$$X + X' = 0,\ P + Y + Y' = 0,\ Z = 0,\ \frac{d\omega}{dt} = 0$$

$$Y \xi + Y' \xi' + \omega^2 \sum m y \alpha = 0,\ X \xi + X' \xi' + \omega^2 \sum m x \alpha = 0$$

.

В этих двух случаях формулы сильно упростились бы, если бы суммы $\sum m y \alpha$, $\sum m x \alpha$, были равны нулю. Рассматриваемое условие приближенно выполняется в очень частом на практике случае, когда тело приблизительно симметрично относительно плоскости *yOx*, перпендикулярной оси вращения. Действительно, для каждой материальной точки с координатами *x, y,* α тогда существует другая точка, для которой *x* и *y* те же, а α равно и противоположно по знаку. Для этих двух точек произведения m x α, следовательно, равны и противоположны по знаку, так же как и произведения m y α; следовательно, суммы $\sum m y \alpha$ и $\sum m x \alpha$ равны нулю, как составленные из элементов, попарно уничтожающихся.

Впрочем, плоскость *yOx* тогда целиком проходит через центр тяжести.

В первом примере имеем тогда $Y \xi + Y' \xi' = 0$ и, так как также $Y + Y' = 0$, отсюда следует $Y = 0$ и $Y' = 0$, и для определения давлений *X* и *X′* остаются уравнения

$$X + X' + \omega^2 M \alpha = 0,\ X \xi + X' \xi' - P \alpha = 0.$$

Во втором примере имеем

$$X = 0\ ,\ X' = O\ ,\ Y\xi + Y'\xi' = 0 \qquad \text{и} \qquad Y + Y' + P = 0\ ;$$

эти два последних уравнения, вместе взятые, доказывают, что силы Y и Y' имеют равнодействующую, равную и противоположную весу P. Условие $Y\xi + Y'\xi' = 0$ удовлетворяется при $\xi = 0$ и $\xi' = 0$; то есть ось может иметь только одну точку опоры, которая тогда должна находиться в центре тяжести. Если ξ и ξ' не равны нулю, они неравны, ибо если бы ξ = ξ', уравнение $\xi Y + \xi Y' = 0$ или $\xi(Y + Y') = 0$ было бы несовместимо с $Y + Y' + P = 0$.

241. В общем, когда тело симметрично относительно плоскости, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной оси вращения, уравнения [5] и [6] пункта 238 упрощаются. Шесть уравнений, вместе взятых, в этом случае таковы:

$$\sum F_x + X + X' + \omega^2 M\alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [1]$$

$$\sum F_y + Y + Y' - \frac{d\omega}{dt} M\alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [2]$$

$$\sum F_\alpha + Z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [3]$$

$$\sum M\{F\}_z - \frac{d\omega}{dt}\sum m r^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [4]$$

$$\sum M\{F\}_x + Y\xi + Y'\xi' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [5]$$

$$\sum M\{F\}_y + X\xi + X'\xi' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [6]$$

§: 3. О центре удара.

242. Предполагается, что силы F сводятся к одной, и спрашивается, каким условиям она должна удовлетворять, чтобы давления X, Y, X', Y' и Z были равны нулю. В этом предположении уравнение [3] предыдущего пункта дает $F_x = 0$, то есть сила F должна действовать в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

Уравнения [5] и [6] дают

$$M\{F\}_x = 0 \qquad \text{и} \qquad M\{F\}_y = 0\ ,$$

то есть сила должна действовать в плоскости xOy, проходящей через центр тяжести.

Уравнение [1] сводится к $F_x + \omega^2 M\alpha = 0$. Оно становится просто $F_x = 0$, если тело исходит из покоя; то есть в этом случае сила F должна быть перпендикулярна оси Ox; откуда следует $F_y = F$.

Уравнения [2] и [4] определяют положение F. Пусть l — расстояние от начала до точки, где сила F пересекает прямую Ox, проходящую через центр тяжести. Уравнение [4] становится $Fl - \frac{d\omega}{dt}\sum m r^2 = 0$, а уравнение [2] сводится к $F - \frac{d\omega}{dt} M\alpha = 0$.

Исключая $\frac{d\omega}{dt}$ из этих двух уравнений, получаем

$$l = \frac{\sum m r^2}{m\alpha}\ .$$

Эта длина, не зависящая от интенсивности силы F, есть та, которую находят при изучении составного маятника для расстояния от оси подвеса до соответствующего центра качаний. Эта точка, через которую должна проходить сила F, чтобы опоры не испытывали никакого давления, носит название центр удара.

243. *Пример*. Если тело представляет собой прямой очень тонкий стержень длиной λ и ось вращения находится на одном из его концов, имеем

$$l = \frac{2}{3}\lambda .$$

Обратно, если расстояние от оси вращения до одного из концов равно трети длины, центр удара находится на другом конце. Эта теория объясняет хорошо известный факт: если сильно зажать стержень в руке, в то время как этот стержень получает удар, чувствуется толчок, если только точка удара не находится близко к центру удара, соответствующему оси, которая проходила бы через середину руки.

§: 4. Баллистический маятник.

244. Тело, находящееся в покое, подвешенное на неподвижной горизонтальной оси A (фиг. 77), предполагается ударенным другим телом малых размеров, масса которого μ и скорость v, направленная в плоскости, перпендикулярной оси вращения; природа двух тел такова, что они остаются соединенными после удара. Требуется угловое ускорение системы в конечный момент удара.

В течение очень короткой длительности удара ударяющее тело будет испытывать со стороны ударяемого переменное давление F; и если назвать u общую скорость двух тел в B в конечный момент удара, предполагая эту скорость того же направления, что и скорость v (что равносильно утверждению, что скорость v перпендикулярна AB), получим

$$\mu v - \mu u = \int F\,dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [1]$$

Этот интеграл берется по малой длительности удара, как по бесконечно малым длительностям dt. Силы, равные последовательным значениям F, будут действовать на ударяемое тело в течение тех же бесконечно малых длительностей dt. Сила тяжести, пренебрежимая в рассматриваемом случае по сравнению с реакциями F, развиваемыми ударом, можно в течение длительности удара отвлечься от этой силы. Называя ω переменную угловую скорость системы во время удара и обозначая через h расстояние BA, получим (236)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{F\,h}{\sum m r^2},$$

откуда

$$\omega' = \frac{h}{\sum m r^2}\int F\,dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [2]$$

называя ω' угловую скорость в конечный момент удара, когда ударяющее и ударяемое тела имеют общую скорость u.

Из [1] и [2], замечая соотношение $u = \omega' h$, получаем

$$\omega' = \frac{h}{\sum m r^2}\left(\mu v - \mu h \omega\right) \qquad \text{откуда} \quad \omega' = \frac{h \mu v}{\sum m r^2 + \mu h^2} \ldots\ldots [3]$$

Это можно выразить, сказав, что угловая скорость системы в конце удара равна моменту количества движения ударяющего тела до удара относительно оси подвеса, деленному на момент инерции полной системы после удара относительно той же оси.

245. Если известны все величины, входящие в уравнение [3], за исключением скорости v ударяющего тела до удара, можно заключить о ней из соотношения

$$v = \frac{\omega}{h \mu}\left(\sum m r^2 + \mu h^2\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [4]$$

Чтобы применить эту формулу к баллистическому маятнику, обозначим через I величину $\sum m r^2 + \mu h^2$ или момент инерции системы, образованной соединением двух тел после удара. Мощность живого действия, которой обладает система после удара, будет $\frac{1}{2}\omega^2 + I$; и в этот момент центр тяжести маятника находится еще очень близко к вертикали, проходящей через ось подвеса. Но при первом качании, которое совершит система, этот центр тяжести поднимется на некоторую высоту H, которую можно наблюдать; и если обозначить через P вес маятника и ударившего тела, которое с ним соединилось, работа силы тяжести от конечного момента удара до момента наибольшего подъема центра тяжести будет $P\ H$; и поскольку мощность живого действия в этот последний момент равна нулю, имеем

$$\frac{1}{2}\omega^2 I = P\ H \qquad \text{откуда} \qquad v = \frac{\omega I}{h \mu} = \frac{1}{h \mu}\sqrt{2\ I\ P\ H}\ .$$

246. Можно определить I экспериментальным путем. Если T — длительность малого качания маятника, имеем $T = \Pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l — длина простого маятника, который качается так же, как рассматриваемый составной маятник; имеем, следовательно,

$$l = \frac{I}{M\ a}\ ,$$

где M — масса маятника, а a — расстояние его центра тяжести до оси подвеса.

Если записать $\frac{P}{g}$ вместо M, получаем $l = \frac{I\ g}{P\ a}$ и, следовательно,

$$T = \Pi\sqrt{\frac{I}{P\ a}} \qquad \text{откуда} \qquad I = \frac{P\ a\ T^2}{\Pi^2}$$

и наконец

$$v = \frac{P\ T}{\Pi\ h\ r}\sqrt{h\ a\ H}\ .$$

247. Чтобы ось подвеса не испытывала никакого толчка, необходимо, чтобы направление удара проходило через центр удара; следует, следовательно, иметь, предполагая точку B очень близкой к плоскости, проходящей через ось A и центр тяжести,

$$\tau = \frac{\sum m\, r^2}{M'\, a},$$

где M' обозначает здесь массу маятника до его соединения с ударяющим телом. Эту величину τ определяют, заставляя маятник качаться до опыта с ударом. Для этого, если T' — длительность малых качаний, имеем

$$T' = \Pi \sqrt{\frac{\tau}{g}} \qquad \text{откуда} \qquad \tau = \frac{g\, T'^2}{\Pi^2}.$$

Если удастся поместить ударяющее тело на это расстояние τ от оси подвеса и в положение, очень близкое к плоскости, проведенной через ось и центр тяжести маятника до удара, два времени T и T' качаний до и после удара будут практически равны.

§: 5. *Взаимные давления вращающихся тел при переменном движении.*

248. Пусть два тела вращаются, одно вокруг оси A, другое вокруг оси A'. На них действуют, одно — силой P, другое — силой Q, и кроме того, они связаны между собой веревкой BB', намотанной на цилиндры с осями A и A' и радиусами R и R'.

Если бы связь осуществлялась зубчатым зацеплением, натяжение T веревки BB' было бы заменено взаимным давлением соприкасающихся зубьев.

Приняв это, предположим, что при вращательном движении двух тел, из которых одно ведет другое, положительная или движущая работа Q не равна отрицательной работе или работе сопротивления P; что, следовательно, движение является переменным; и спрашивается интенсивность натяжения T.

Если $\frac{d\omega}{dt}$ и $\frac{d\omega'}{dt}$ — угловые ускорения двух тел; $\sum m\, r^2$ и $\sum m'\, r'^2$ — их моменты инерции относительно осей вращения A и A'; p и q — плечи сил P и Q, получим (п. 236)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{T\, R - P\, p}{\sum m\, r^2} \qquad \text{и} \qquad \frac{d\omega'}{dt} = \frac{Q\, q - T\, R'}{\sum m'\, r'^2}.$$

Кроме того, точки B и B' имеют одинаковую скорость и, следовательно, одинаковое ускорение; имеем, таким образом, $R\,\omega = R'\,\omega'$, или, дифференцируя и подставляя значения $d\omega$ и $d\omega'$,

$$R \,.\, \frac{T\, R - P\, p}{\sum m\, r^2} = \frac{Q\, q - T\, R'}{\sum m}\, r'^2.$$

уравнение, из которого получаем

$$T = \frac{P\, p\, R \,.\, \sum m'\, r'^2 + Q\, q\, R' \sum m\, r^2}{R^2 \sum m'\, r'^2 + R'^2 \sum m\, r^2}.$$

249. Для упрощения этого выражения заменим силу P силой P_1, касательной к цилиндру радиуса R, способной производить ту же работу; заменим таким же образом силу Q эквивалентной силой Q_1, касательной к цилиндру радиуса R'; пусть, кроме того,

M и M' — две массы, которые, будучи сосредоточены в двух кольцах радиусов R и R', имели бы те же моменты инерции, что и два рассматриваемых тела; будем иметь

$$P\,p = P_1 R \;;\; Q\,q = Q_1 R' \;;\; \sum m r^2 = M R^2 \;;\; \sum m r^2 = M' R'^2 \;;.$$

Подставляя эти значения, выражение для T становится

$$T = \frac{M' P_1 + M Q}{M' + M} \;.^{(*)}$$

Те же подстановки в выражения для угловых ускорений дают

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{T - P_1}{M R} \qquad \text{и} \qquad \frac{d\omega'}{dt} = \frac{Q_1 - T}{M' R'}$$

В случае, когда $Q_1 = P_1$, находим $T = P_1 = Q_1$, и, следовательно, $\frac{d\omega}{dt} = 0$ и $\frac{d\omega'}{dt} = 0$, то есть движение равномерно.

В случае, когда Q_1 отличается от P_1, пусть $Q_1 = P_1 + Q_2$; из этого следует

$$T = P_1 + \frac{M Q_2}{M' + M} = P_1 + Q_2 \frac{1}{\frac{M'}{M} + 1}$$

(*) Я обязан г-ну Кориолису идеей этого преобразования напряжения в давление T, выражение которого, таким образом, становится легко выразить обычным языком.

Та же формула распространяется на любое количество вращающихся тел, соединенных между собой тросами или шестернями.

Пусть это будет, например, рис. 79 четыре лебедки, вращающиеся вокруг осей A, B, C, D ; и пусть T-натяжение троса $E F$, который связывает вторую лебедку с третьей.

Рассматривая в течение очень короткого промежутка времени систему первых двух лебедок как подверженную воздействию только двух внешних сил T и P, мы имеем за это время уравнение воздействия работы :

$$\mathrm{T}\{T\} - \mathrm{T}\{P\} = \frac{1}{2}\sum m v^2 - \frac{1}{2}\sum m v_0^2$$

поскольку второй член этого уравнения распространяется на все материальные точки двух лебедок a и B.

Пусть P_1 - сила, которая выполняла бы ту же работу, что и P, если бы она была приложена в E ко второму лебедку, а P – к первому.

Пусть M - масса, которая, если бы она была сосредоточена в одной и той же точке E или распределена по окружности, проходящей через эту точку, имела бы ту же живую силу, что и система двух лебедок A, B.

Пусть σ будет путь, описанный Θ за время точкой E и всеми точками хорды $E F$.

Пусть, наконец, u_0 и u - скорости E в два крайних момента времени Θ .

получим $\mathrm{T}\{P\} = P_1 \sigma$; $\mathrm{T}\{T\} = T \sigma$; $\frac{1}{2}\sum m v^2 - \frac{1}{2}\sum m v_0^2 = \frac{1}{2} M \left(u^2 - u_0^2\right)$

значения, которые дает подстановка в предыдущем уравнении $\sigma(T - P) = \frac{1}{2}\left(u^2 - u_0^2\right) M$. Аналогичным образом, называя Q_1 силой, эквивалентной Q, но приложенной в E, а M массой, которая, сконцентрированная в F, будет иметь ту же живую мощность, что и две лебедки $C D$, получим

$$\sigma(Q_1 - T) = \frac{1}{2}\left(u^2 - u_0^2\right) M'$$

теперь последние два уравнения дают $\frac{Q_1 - T}{M}' = \frac{T - P}{M}$ откуда $T = \frac{M' P_1 + M Q_1}{M} + M'$ следовательно, общую формулу, которую мы должны были установить. Будет легко вычислить величины P_1, Q_1 , M, M', когда мы узнаем силы P, Q, их расстояния до осей A, D, их моменты инерции лебедок относительно их осей и, наконец, радиусы зубчатых колес лебедок или радиусы цилиндров, к которым они прикреплены. нити связи проходят по касательной.

и, следовательно, угловые ускорения положительны или отрицательны в зависимости от того, больше или меньше Q , чем P_1, что очевидно *a priori*, но из этого значения T можно заключить, кроме того, что если одна из сил Q или P, предположительно сначала в равновесии, как это должно быть для равномерности движения, получает значительное приращение, обычно кратковременное, важно, чтобы момент инерции тела, к которому эта сила приложена, был как можно больше по сравнению с моментом инерции другого тела, если хотят, чтобы натяжение T испытывало малое изменение.

250. Эта теория применима к выбору места расположения маховиков на валах: эти детали, обладающие большими моментами инерции, должны быть приближены к точкам приложения сил, способных к значительному и кратковременному возрастанию.

§: 6. О маховиках.

251. Машина, состоящая из вращающихся твердых деталей, связанных между собой зубчатыми зацеплениями или бесконечными ремнями, может иметь в каждом из своих материальных элементов равномерное движение; для этого необходимо и достаточно, чтобы сумма движущей работы за любое время была постоянно равна сумме работы сопротивления за то же время. Когда это равенство не имеет место для любых равных длительностей, оно может, тем не менее, существовать для определенных периодов; тогда переменные скорости периодически становятся снова теми же. Если v_0 — в некоторый момент скорость элемента массы m системы; и если она становится v после любого промежутка времени, τ_m — для того же промежутка времени движущая работа сил, действующих на машину, а τ_r — абсолютное значение работы сопротивления, имеем (39)

$$\sum \frac{1}{2} m v^2 - \sum \frac{1}{2} m v_0^2 = \tau_m - \tau_r ,$$

уравнение, в котором величины $\sum \frac{1}{2} m v_2$ и суть τ_m и τ_r переменные, зависящие от времени, прошедшего с начального момента. Если предположить, что τ_m сначала растет быстрее, чем τ_r в первое время после начального момента, скорости v будут расти, и наибольшее значение $\sum \frac{1}{2} m v^2$ будет соответствовать наибольшему значению $\tau_m - \tau_r$; если, напротив, τ_r начинает преобладать, скорости v будут уменьшаться, и минимум $\sum \frac{1}{2} m v^2$ будет соответствовать максимуму $\tau_r - \tau_m$, или абсолютной величине разности между работой сопротивления и движущей работой.

Момент, когда эта разность является максимумом, и тот момент, когда её приращение равно нулю для бесконечно малого времени, то есть это момент, когда элементарная движущая работа равна элементарной работе сопротивления; другими словами, это момент, когда силы удовлетворяют условиям равновесия.

Отсюда способ установить соотношение между наибольшей и наименьшей угловыми скоростями одной из вращающихся деталей, когда силы известны для всех положений системы.

252. *Первый пример*: Кривошип простого действия (фиг. 80).

Колесо, центр тяжести которого находится на оси O, подвержено двум силам: одной P — сопротивления, действующей постоянно на конце плеча $DO = a$; другой Q — движущей, приложенной к пальцу B кривошипа, радиус которого $OB = b$, действующей в постоянно вертикальном направлении, но только при опускании.

Чтобы движение было периодически равномерным, необходимо, чтобы по истечении полного оборота имело место

$$\tau\{P\} = \tau\{Q\} \quad \text{или} \quad P\ 2\,\Pi\,\alpha = Q\ .2\ b \quad \ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

Начиная с момента, когда палец находится в A, движущая работа сначала меньше работы сопротивления, так как элементарные работы пропорциональны моментам (28), и когда палец находится в A, момент Q равен нулю. С этого момента скорости уменьшаются до момента, когда силы P и Q удовлетворяют условиям равновесия. Пусть x — угол $B'OE$, который составляет тогда радиус кривошипа с горизонталью, получим

$$P\,\alpha = Q\ b\cos x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,2\,]$$

Эти уравнения [1] и [2] дают $\cos x = \frac{1}{\Pi}$, откуда $\log\cos x = -\log\Pi = 0{,}4971499 = \bar{1}\ ,5028501$ и $x = 71°\ 26'\ ,4$.

Точка B'', где момент Q, после того как превысил момент P, снова становится ему равным, находится на той же вертикали, что и B'. Таким образом, скорости минимальны, когда палец кривошипа находится в B', и максимальны, когда он в B''.

Пусть ω' и ω'' — значения угловой скорости в эти два момента. В силу теоремы об эффекте работы,

$$\frac{1}{2}\,\omega''^{2}\sum m^{2} - \frac{1}{2}\,\omega'^{2}\sum m\,r^{2} = Q \times B'\,B'' - P \times \text{дуга}\ M'\,E\,M'' \ .$$

однако

$$B'\,B'' = 2\ b\sin x = 0{,}94799\ .\ 2\ b$$

$$M'\,E\,M'' = 2\,\Pi\,\alpha\,\frac{71°\ 26'\ ,4}{180} = 2\,\Pi\,\alpha\,\frac{4286{,}4}{10{,}800} = 0{,}3989\ .\ 2\,\Pi\,\alpha$$

подставляя и используя уравнение [1], получаем

$$\frac{1}{2}\left(\omega''^{2} - \omega'^{2}\right)\sum m\,r^{2} = 0{,}5511\ .\ 2\ b\ Q \quad \ldots\ldots\ldots [\,3\,]$$

соотношение, позволяющее вычислить, каким должен быть момент инерции $\sum m\,r^{2}$ колеса, чтобы разность крайних скоростей ω'' и ω' (которая может считаться очень мало отличающейся от средней угловой скорости колеса, выведенной из числа оборотов, совершаемых им в минуту) Поставим ли мы условие, чтобы разница $\omega'' - \omega'$ была не более $\frac{1}{R}$ этого среднего; мы будем иметь.

$$\frac{1}{2}(\omega'' - \omega') = W \qquad \text{и} \qquad \omega'' - \omega' = \frac{W}{R}$$

откуда $$\frac{1}{2}\left(\omega''^2 - \omega'^2\right) = \frac{W^2}{R}$$

и в результате $$\frac{W^2}{R}\sum m\,r^2 = 0{,}5511\,.\,2\,b\,Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,4\,]$$

Подставляя в уравнение, получим $\sum m\,r^2$ в зависимости от W, от n и от работы $2\,b\,Q$, которую движущаяся сила развивает с каждым оборотом.

253. Если предположить, что массу колеса можно считать сосредоточенной в ободе, вес которого $П$, средняя скорость W, а радиус R, получим

$$w = \frac{W}{R} \qquad \text{и} \qquad \sum m\,r^2 = \frac{П}{g}R^2$$

откуда $$w^2\sum m\,r^2 = \frac{П\,W^2}{g}$$

уравнение [4] дает следующее

$$П\,W^2 = 0{,}5511\,.\,2\,b\,Q\,.\,gn \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,5\,]$$

Пусть M — число оборотов кривошипа в минуту, а N количество лошадиных сил, выражающее бесконечно продолжительную работу силы Q ; работа в секунду будет выражена как на $\frac{2\,b\,Q\,M}{68}$, так и на $75\,H$

откуда $2\,b\,Q = 4.500\,\frac{N}{M}$; и уравнение [5] сводится к

$$П\,W^2 = 24300\,\frac{n\,N}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,6\,]$$

254. *2-й пример*. Кривошип двойного действия. Сила Q постоянной интенсивности и направления действует сверху вниз на полуокружности $AB'BA''$ и снизу вверх на другой полуокружности, которую палец описывает, поднимаясь.

Движение должно быть периодически равномерным, необходимо, чтобы за полный оборот имело место

$$Т\{P\} = Т\{Q\} \qquad \text{или} \qquad P\,.\,2\,П\,\alpha = Q\,.\,4\,b \quad \ldots.[\,7\,]$$

и из этого следует, что движение также периодически равномерно за полуобороты; ибо в каждом из них работа сопротивления равна $P\,П\,\alpha$, а движущая работа равна $Q\,2\,b$, величины равные согласно уравнению [7].

Точки B' и B'', или B''' и B^{IV}, положения пальца, когда скорости минимальны и максимальны, определяются также уравнением

$$P\,\alpha = Q\,b\cos x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,8\,]$$

Условия [7] и [8] дают

$$\cos x = \frac{2}{П} \quad \text{откуда} \quad x = 50^\circ\,.\,27'\,,\,6\,.$$

Найдем, действуя как в пункте 252 и учитывая соотношение [7],

$$\frac{1}{2}\left(\omega''^2-\omega'^2\right)\sum m\,r^2 = Q\,.\,2\,b\,\sin x - P\,2\,\Pi\,\alpha\,.\,\frac{50\,^\circ\,27\,'\,6}{180} = Q\,2\,b\,(0{,}7712-0{,}5607) = 0{,}2105\,.\,2\,b\,Q$$

и сохраняя при ω и n их значения,

$$\frac{w^2}{n}\sum m\,r^2 = 0{,}2105.\,2\,b\,Q$$

255. Используя те же обозначения, что и ранее, получим для двойного действия

$$W^2\sum m\,r^2 = \frac{\Pi\,W^2}{g} \qquad \text{и} \qquad \frac{4\,b\,Q\,M}{60} = 75\,N$$

и в конце концов

$$\Pi\,W^2 = 4645\,\frac{n\,N}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,9\,]$$

256. Применение к паровой машине, цитируемой г-ном Мореном.

Радиус маховика $R = 3{,}05$ м; $M = 19$ откуда $W = \frac{2\,\Pi\,R\,.\,19}{60} = 6{,}06$.

$N = 35$; $n = 40$ откуда $\Pi = 9320\ кг$.

257. *3-й пример*. Кривошип простого действия, но с противовесом (фиг. 81).

В точке K, диаметрально противоположной пальцу B и на произвольном расстоянии C, закреплено тело весом C, такое что $Cc = \frac{1}{2}\,Q\,b$. Из этого следует, что во время опускания пальца половина работы Q уничтожается работой C; но в следующем полуобороте сила Q больше не действует, и тело K, опускаясь, возвращает половину работы Q, которую оно нейтрализовало в течение первого полуоборота. Движение, следовательно, такое же, как в случае кривошипа двойного действия, и, следовательно, формулы пунктов 254 и 255 применимы. Следует заметить, что если Π не включает вес C, нужно, называя v среднюю скорость этого добавочного тела или груза, записать уравнение

$$\Pi\,W^2 + C\,v^2 = 4645\,\frac{n\,N}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [\,10\,]$$

258. *Замечание*. Формулы [6], [9] и [10] применимы в случае, когда маховик находится не на валу самого кривошипа, при условии, что M всегда является числом оборотов кривошипа в минуту, в то время как W и v будут собственными скоростями обода маховика и противовеса C, всегда диаметрально противоположного пальцу кривошипа.

259. *4-й пример*. Кривошип двойного действия с противовесом. (фиг. 82).

Полезность противовеса для кривошипа простого действия порождает вопрос, не может ли аналогичное расположение быть с выгодой применено к кривошипу двойного действия.

Очевидно, в этом последнем случае противовес не мог бы быть закреплен на валу кривошипа, ибо если бы он приходил на помощь движущей силе Q, когда палец кривошипа находится в одной из точек A, A' (обычно называемых мертвыми точками), он становился бы сопротивлением, когда палец находился бы в другой из этих точек. Но вопрос получает, напротив, утвердительное решение, если поместить противовес на вал, связанный с валом кривошипа зубчатой передачей так, чтобы он делал два оборота, в то время как кривошип делает один.

O — ось кривошипа, пусть O' — параллельная ось, связанная с первой так, что имеет вдвое большую угловую скорость.

Пусть C — вес тела, центр тяжести которого находится на расстоянии C от оси O', и оно жестко закреплено на этой оси так, что когда палец кривошипа находится в верхней точке A, тело C находится в H' на горизонтали $O'H'$, проходящей через O', и собирается опускаться; из этого следует, что когда палец находится в H на горизонтали OH, тело C находится в H'' на продолжении горизонтали $H'O'$ и собирается подниматься. В общем, вес C становится движущим, когда работа Q близка к своему минимуму, и сопротивлением в противном случае. Он, следовательно, осуществляет временную регуляцию движения, которую будет легко дополнить маховиком.

Определим сначала точку C так, чтобы алгебраическая сумма работы Q и C за одно и то же очень малое перемещение была одинаковой, когда палец кривошипа находится в двух положениях A, H, и, следовательно, когда тело C находится в двух положениях H', H''. Это условие (замечая, что угловое перемещение радиуса $O'C$ всегда вдвое больше, чем OB) приводит к соотношению

$$Cc = \frac{Q\,q}{2} - Cc \qquad \text{или} \qquad Cc = \frac{1}{4}\,Q\,b \quad \ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

Найдем теперь два положения наибольшей и наименьшей угловой скорости. За пол-оборота кривошипа тело C делает полный оборот; работа его веса равна нулю, а работа Q равна, как и ранее, из-за периодической равномерности движения,

$$Q\,.\,2\,b = \frac{1}{2}\,\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,2\,]$$

называя τ работу сопротивления, развиваемую за один оборот кривошипа постоянной силой P, которую машина предназначена преодолевать и которую мы предположим приложенной к колесу, закрепленному на оси O'.

Пусть B — положение пальца, где силы Q, C и P находятся в динамическом равновесии. Назовем x угол AOB и, следовательно, $2x$ угол $H'O'C'$; ω — угловая скорость кривошипа в этот момент, и, следовательно, 2ω — угловая скорость C. Запишем, что работа Q плюс работа C за бесконечно малое время θ равна работе P за то же время. Получим

$$Q \sin x \cos\theta + C \cos 2x\,.\,\cos \omega c\,\theta = \tau\,.\,\frac{\omega\,\theta}{2\,\Pi}$$

или в соответствии с уравнениями [1] и [2]

$$\sin x + \frac{1}{2}\cos 2\,x = \frac{2}{\Pi}$$

что изменяется на $$\sin x + \frac{1}{2} - \sin^2 x = 0{,}636$$

то, откуда берутся два значения *sin x*; а именно *0,163* и *0,837* и, следовательно, четыре значения угла *x* меньше *180°* ; а именно

$$x' = 9°\,23' \qquad x''' = 123°\,8'$$

$$x'' = 56°\,52' \qquad x^{IV} = 170°\,37'$$

При этом, действуя, как и раньше (252 и 254), получим

$$\frac{1}{2}\left(\omega\,''^2 - \omega\,'^2\right)\sum m\,r^2 = Q\,b\left(\cos x\,' - \cos x\,''\right) + C\,c\left(\sin 2\,x\,'' - \sin 2\,x\,'\right) - \tau\,\frac{x\,'' - x\,'}{360\,°}$$

$$\frac{1}{2}\left(\omega\,'''^2 - \omega\,''^2\right)\sum m\,r^2 = Q\,b\left(\cos x\,'' - \cos x\,'''\right) + C\,c\left(\sin 2\,x\,''' - \sin 2\,x\,''\right) - \tau\,\frac{x\,''' - x\,''}{360\,°}$$

$$\frac{1}{2}\left(\omega^{IV\,2} - \omega\,'''^2\right)\sum m\,r^2 = Q\,b\left(\cos x\,''' - \cos x^{IV}\right) + C\,c\left(\sin 2\,x^{IV} - \sin 2\,x\,'''\right) - \tau\,\frac{x^{IV} - x\,'''}{360\,°}$$

и подставив приведенные выше значения, полученные из *x*, из *Cc*, и из, [1] и [2], найдем

$$\frac{1}{2}\left(\omega\,''^2 - \omega\,'^2\right)\sum m\,r^2 = \quad 0{,}035\,.\,2\,b\,Q\,,$$

$$\frac{1}{2}\left(\omega\,'''^2 - \omega\,''^2\right)\sum m\,r^2 = -\,0{,}050\,.\,2\,b\,Q\,,$$

$$\frac{1}{2}\left(\omega^{IV\,2} - \omega\,'''^2\right)\sum m\,r^2 = \quad 0{,}036\,.\,2\,b\,Q\,;$$

откуда $$\frac{1}{2}\left(\omega\,'^2 - \omega^{IV\,2}\right)\sum m\,r^2 = -\,0{,}020\,.\,2\,b\,Q\,.$$

Таким образом, порядок величины угловых скоростей равен: $\omega\,'''$, $\omega\,'$, ω^{IV} , $\omega\,''$.

Наибольшее изменение происходит между вторым и третьим положениями динамического равновесия; и делая в уравнение

$$\frac{1}{2}\left(\omega\,''^2 - \omega\,'''^2\right)\sum m\,r^2 = 0{,}050\,.\,2\,b\,Q$$

те же замены, что и в числах 252 и 255,

$$\frac{1}{2}\left(\omega\,''^2 - \omega\,'''^2\right) = \frac{W^2}{n}\,, \qquad W^2\sum m\,r^2 = \frac{\Pi\,W^2}{g} \quad \text{и} \quad 2\,b\,Q = \frac{2250\,N}{M}\,,$$

находим: $$\Pi\,W^2 = 1104\,\frac{n\,N}{M}\,.$$

То есть четверть того, что указано в Формуле [9], № 255, для кривошипа двойного действия.

260. Аналогичные предыдущим вопросы могут быть решены в более сложных случаях с помощью графических методов. Предположим, например, что речь идет о паровой машине с балансиром, связанным шатуном с кривошипом маховика.(*) Допустим 1° что для каждого положения поршня известна равнодействующая F давлений и трений, которые он испытывает. 2° что равнодействующая весов шатунов и балансира проходит через ось вращения последнего, по крайней мере в их среднем положении, так что работа силы тяжести на движущуюся систему примерно равна нулю. 3° что движение периодически равномерно, так что после каждого оборота маховика и кривошипа все скорости становятся прежними.

Приняв это, примем за начало периода момент, когда поршень находится в одном из концов хода. Пусть в этот момент ω_0 — угловая скорость вала кривошипа. Называя b радиус OB кривошипа, фиг. 83, можно представить мощность живого действия системы в этот момент как

$$\frac{1}{2}\,\omega_0^2\, b^2\, M\ ,$$

обозначая через M массу, фиктивно сосредоточенную на окружности радиуса OB. Точно так же в случае, когда вал кривошипа связан зубчатыми передачами с одним или несколькими телами, вращающимися вокруг осей, проходящих через их соответствующие центры тяжести.

Пусть в другой момент ω — угловая скорость вала кривошипа, так что мощность живого действия вращающихся деталей становится тогда

$$\frac{1}{2}\,\omega^2\, b^2\, M\ .$$

Добавим к этому мощность живого действия, которой обладают в этот момент балансир и его шатуны. Для этого назовем ω' угловую скорость балансира и допустим (что мало отличается от истины), что его мощность живого действия и мощность шатунов, включая поршень, такая же, как если бы их массы были перенесены в точки сочленения этих деталей с балансиром. Тогда переменная мощность живого действия балансира и шатунов будет в рассматриваемый момент представлена как

$$\frac{1}{2}\,\omega'^2\, c^2\, M'\ ,$$

называя c радиус AC, соединяющий ось A вращения балансира с точкой C сочленения, и обозначая через M' массу, фиктивно перенесенную на расстояние AC от этой оси.

Если, кроме того, назовем τ_m и τ_r движущую работу на поршне и работу сопротивления на вращающихся деталях с начального момента, будем иметь

(*) Г-н Кориолис более полно рассмотрел этот вопрос в мемуарах, опубликованных в *журнале Политехнической школы*.

$$\frac{1}{2}\left(\omega^2-\omega_0^2\right)b^2\,M+\frac{1}{2}\,\omega'^2\,C^2\,M'=\tau_m-\tau_r \quad \ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

Для приближенного вычисления работы τ_m можно допустить, что шатун DE поршня сохраняет практически одно и то же направление, так что работа силы F та же, как если бы эта сила действовала по касательной к окружности с центром в A. Пусть r — радиус AD' этой окружности. За бесконечно малое время dt работа F будет

$$F\,\omega'\,r\,dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,2\,].$$

Теперь существует простое соотношение между скоростями ω и ω': действительно, длина BC постоянна, следовательно, скорости точек B и C, спроецированные на BC, равны; поэтому, если опустить на BC перпендикуляры AM, ON, имеем

$$\omega'\,C\cos\widehat{CAM}=\omega\,b\cos\widehat{BON} \quad \text{или} \quad \omega'\,AM=\omega\,.\,ON\,.$$

Проще, если провести OQ параллельно AC и обозначить $OQ = q$, имеем

$$\frac{AM}{ON}=\frac{AC}{OQ}=\frac{c}{q} \qquad \text{и} \qquad \omega'=\omega\,\frac{q}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,3\,]$$

так что отношение ω к ω' изменяется пропорционально единственной переменной q.

Из этого следует, что формула [2] может быть заменена на

$$F\,\omega\,\frac{q\,r}{c}\,dt\,, \qquad \text{или} \qquad F\,\frac{q\,r}{c\,b}\,\omega\,b\,dt\,, \qquad \text{или} \quad \frac{q\,r}{c\,b}\,F\,dx\,,$$

обозначая через dx дугу, описанную точкой B за время элемента работы τ_m.

Следовательно, окончательно

$$\tau_m=\int_0^x \frac{q\,r}{c\,b}\,F\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,4\,]$$

отсчитывая дугу x от мертвой точки, которую занимает B в начальный момент. Этот интеграл может быть представлен и вычислен как площадь под кривой, принимая за абсциссы дуги x, а за ординаты значения $\frac{r}{c\,b}\,.\,F\,q$ в силу переменных F и q, зависящих от x. Подстановка формулы [3] в [1] дает

$$\frac{1}{2}\left(\omega^2-\omega_0^2\right)b^2\,M+\frac{1}{2}\,\omega^2\,q^2\,M'=\tau_m-\tau_r \quad \ldots\ldots\ldots [\,5\,]$$

В этом уравнении τ_m известно для различных значений x; то же самое для τ_r, которое обычно пропорционально x. Можно теперь, как и ранее, положить

$$\frac{1}{2}\left(\omega^2-\omega_0^2\right) \;<\; \frac{1}{n}\,W^2\,.$$

Наконец, получим хорошее приближение для члена $\frac{1}{2}\,\omega^2\,q^2\,M'$, заменив в нем ω на среднюю угловую скорость W, так что останется только переменная q, зависящая от x. Таким образом, уравнение [5] дает

$$\frac{\tau_m - \tau_r - \frac{1}{2}\omega^2 q^2 M'}{b^2 M} < \frac{1}{n} W^2 \qquad \text{или} \qquad b^2 M > n \frac{\left(\tau_m - \tau_r - \frac{1}{2} W^2 q^2 M'\right)}{b^2 W^2}.$$

Вычисляя наибольшее значение правой части, получим момент инерции маховика $M b^2$.

§: 7. О молотах, приводимых в движение кулачками. (*)

261. «В кузницах и на других металлургических заводах применяют три вида молотов, форма и пропорции которых зависят от назначения, для которого они предназначены, а именно:

1° Коромысловые молоты, называемые также кричными молотами, применяемые для протяжки и плющения мелкого железа, для рафинирования сталей, для изготовления холодного оружия и различных инструментов; вес собственно молота колеблется от 80 до 40 кг и ниже.» Он наносит «от 200 до 400 ударов в минуту. Кулачок действует на конец рукоятки, противоположный тому, где закреплен молот, и ось вращения находится между этими двумя точками.»

2° Подъемные молоты, у которых кулачок поднимает рукоятку между молотом и осью вращения. Их называют также большими молотами, немецкими молотами. Они применяются особенно для рафинирования железа немецким способом. Их вес колеблется от 300 до 400 кг.» Они наносят от 70 до 200 ударов в минуту.

3° Лобовые молоты, названные так потому, что кулачок захватывает конец рукоятки за молотом по отношению к оси и в вертикальной плоскости этой рукоятки. Они употребляются в кузницах, где изготавливают железо английским способом, и весят от 2500 до 4000 кг, включая рукоятку, которая чугунная.» Они наносят от 60 до 100 ударов в минуту. «К этому классу относятся также большинство молотов или баб, применяемых для валяния шерсти или для подготовки тряпья для изготовления бумаги».

262. «Теория движения этих трех видов молотов одна и та же, за исключением некоторых изменений, которые нужно внести в формулы в зависимости от положения кулачка и рукоятки... Обычно во всех случаях удар кулачка о рукоятку происходит в горизонтальной плоскости, проходящей через ось вращения. Мы будем рассуждать в этом предположении и различать в действии кулачков три периода: первый, соответствующий длительности удара и взаимного сжатия кулачка и той части рукоятки, на которую он действует; второй, который начинается в момент окончания удара и длится до момента, когда кулачок покидает рукоятку; третий, который протекает между моментом, когда кулачок покинул рукоятку, и моментом, когда следующий кулачок ударяет по ней...»

(*) Предмет этого абзаца более подробно и с большей точностью рассматривается в курсе механики г-на Понселе в Артиллерийской и инженерной школе ; отрывки, обозначенные кавычками, дословно взяты из литографированных листов этого курса, издание 1836 года.

263. «Начиная с момента, когда кулачок встречает рукоятку, в точках контакта развиваются усилия взаимного сжатия, которые возрастают до момента, когда впечатление достигает максимума. На этом пределе точки контакта движутся с одинаковой скоростью; сверх того, реакция молекулярных пружин стремится более или менее стереть впечатление и увеличить скорость, переданную молоту, уменьшая скорость кулачка... Но, с одной стороны, повторение и интенсивность ударов нарушает упругость контактирующей точки, а с другой — общие размеры рукоятки и кулачка таковы, что они в действительности прогибаются весьма мало; отсюда следует, что в конце наибольшего сжатия рукоятка и кулачок движутся практически с одинаковой скоростью. Это подтверждается наблюдением, ибо ни в одном из случаев практики невозможно наблюдать между этими телами малейшего разделения.»

264. Пусть N — переменное давление, которое рукоятка молота получает от кулачка в произвольный момент периода удара. Пусть в тот же момент $\frac{d\omega}{dt}$ — угловое ускорение молота, рассматриваемого как твердое тело.

Это угловое ускорение, согласно формуле (236),

$$\frac{d\,\omega}{dt} = \frac{\sum M\{F\}}{\sum m\,r^2},$$

зависит от моментов различных сил, действующих на молот, и, следовательно, не только от силы N, но также от силы тяжести и трения в цапфах. Но вес молота, каким бы значительным он ни был, можно пренебречь по сравнению с силой N, имеющей место в точках контакта во время удара. То же самое относится к трению, момент которого очень мал по сравнению с моментом N.

Пусть R — расстояние от точки контакта кулачка и молота до оси вращения последнего.

Момент N относительно этой оси равен $R\,N$, и предыдущее уравнение становится

$$d\,\omega = \frac{R}{\sum m\,r^2}\,N\,dt,$$

откуда, интегрируя и называя ω угловую скорость молота в конце удара,

$$\omega = \frac{R}{\sum m\,r^2}\int N\,dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [1]$$

За тот же период кулачковый вал подвержен силе, равной и противоположной N, которую он получает от молота в точке контакта последнего с кулачком. Из этого следует отрицательное угловое ускорение, абсолютное значение которого, которое мы обозначим $\frac{d\,\omega'}{dt}$, равно моменту силы N относительно оси вращения кулачкового вала. Пусть $R'\,N$ — этот момент; R' — радиус начальной окружности кулачков. Имеем, обозначая через $\sum m'\,r'^2$ момент инерции кулачкового вала относительно его оси вращения,

$$d\,\omega' = \frac{R'\,N\,dt}{\sum m'\,r'^2} \quad \text{откуда} \quad \omega'_0 - \omega' = \frac{R'}{\sum m'\,r'^2}\int N\,dt \quad \ldots [2]$$

где ω_0 и ω' — угловые скорости кулачкового вала в начале и в конце удара.

Два интеграла $\int N\,dt$, входящие в уравнения [1] и [2], равны, поскольку они берутся для одних и тех же значений N и одних и тех же пределов времени. Следовательно, исключая $\int N\,dt$, получаем

$$\frac{\sum m\,r^2}{R}\,.\,\omega = \frac{\sum m'\,r'^2}{R'}\left(\omega'_0 - \omega'\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [\,3\,]$$

265. Пусть u — скорость кулачка в начале удара, а v — его скорость в конце того же периода; v также является скоростью точки контакта рукоятки в конце удара. Имеем, следовательно,

$$u = \omega'_0\,R', \qquad v = \omega'\,R' = \omega\,R\,.$$

Положим для упрощения

$$\sum m\,r^2 = M\,R^2 \qquad \text{для молота,}$$
$$\sum m'\,r'^2 = M'\,R'^2 \qquad \text{для кулачкового вала;}$$

так что M и M' — две массы, которые, будучи подставлены вместо масс молота и кулачкового вала и сосредоточены на расстояниях R и R' от соответствующих осей вращения, имели бы те же моменты инерции относительно этих осей. Уравнение [3] становится, таким образом,

$$M\,v = M'(u - v) \qquad \text{или} \qquad (M + M')\,v = M'\,u \quad \ldots\ldots [\,4\,]$$

абсолютно так же, как если бы тело массой M' и скоростью u ударило прямо покоящееся тело массой M и v было бы общей скоростью в конце удара.

266. Зная фиктивную массу M молота, можно определить M' так, чтобы разность u - v крайних скоростей не превышала определенной доли средней скорости $\frac{u+v}{2}$.

Пусть $\frac{u+v}{2} = V$ и $u - v = \frac{V}{n}$. Из этого находим $v = V\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$ и уравнение [4] дает

$$M\left(1 - \frac{1}{2n}\right) = M'\,.\,\frac{1}{n} \qquad \text{откуда} \qquad M' = \left(n - \frac{1}{2}\right)M \quad \ldots\ldots [\,5\,]$$

По г-ну Понселе, на практике очень редко бывает, чтобы M' не превышало $10M$. Для кричных молотов и подъемных молотов, применяемых при изготовлении железа, имеем по крайней мере $M' = 12M$; а для лобовых молотов по крайней мере $M' = 30M$.

267. Вычислим мощность живого действия, которая была потеряна кулачковым валом за очень короткую длительность удара и которая должна быть возвращена ему двигателем в течение двух следующих периодов.

В начале удара эта мощность живого действия равна

$$\frac{1}{2}\,\omega'^2_0 \sum m'\,r'^2 \text{ или } \frac{1}{2}\,M'\,u^2\text{; в конце она равна } \frac{1}{2}\,M'\,v^2\,.$$

Уменьшение и, следовательно, соответствующая работа, которую должен совершить двигатель, есть

$$\tau_1 = \frac{1}{2} M' \left(u^2 - v^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,6\,]$$

Нельзя наблюдать ни одну из скоростей u, v; но допускают, что их среднее арифметическое очень мало отличается от средней скорости кулачков, вычисленной по радиусу R' и числу оборотов, которое вал делает в заданное время.

Пусть, следовательно, $$\frac{u+v}{2} = V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,7\,]$$

Это соотношение, объединенное с уравнением [4], позволяет вычислить как функцию V, M и M' значение $\frac{1}{2}(u^2 - v^2) = \frac{u+v}{2} . u - v = V\,(u - v) = V\, v\, \frac{M}{M'}$;

затем, исключая u из [4] и [7], находим

$$v = \frac{2\,M'\,V}{2\,M' + M},$$

и окончательно получаем

$$\tau_1 = \frac{2\,M\,M'\,V^2}{2\,M' + M} \qquad \text{или} \qquad \tau_1 = M\,V^2 . \frac{1}{1 + \frac{M}{2\,M}} \quad .[\,8\,]$$

Видели выше, что отношение $\frac{M}{M'}$ меньше $\frac{1}{10}$, а иногда и меньше $\frac{1}{30}$, работа τ_1 мало отличается от $M\,V^2$, то есть от удвоенной мощности живого действия, которую имел бы молот, если бы его скорость вычислялась по средней скорости кулачков. Половина этой работы уничтожается работой сопротивления молекулярных действий во время удара.

268. Вычислим теперь работу, необходимую для подъема молотов. Назовем:

P — вес молота, его рукоятки и железной оковки;

h — высота, на которую поднимается центр тяжести этой совокупности до момента, когда кулачок покидает молот (после чего молот продолжает подниматься на величину, не входящую в h);

y — практически вертикальный путь, проходимый до того же момента точкой контакта кулачка и молота;

N' — усилие, действующее в этой точке.

Скорость молота очень мало изменяется во время второго периода, поэтому можно считать силы P, N' и трение в цапфах рычага (хвостовика) находящимися в равновесии. Силы P и N' практически параллельны, давление на цапфы равно:

для коромысловых молотов: . . . . . $P + N'$

для лобовых или подъемных молотов: . . . . . $P - N'$

Трение будет

$$\frac{f}{\sqrt{1 + f^2}}(P \pm N') \qquad \text{или} \qquad f_1(P \pm N') .$$

Работа N' равна работе P и трению: таким образом, называя ρ радиус цапфы рычага и замечая, что путь, пройденный окружностью этой цапфы, равен $y \cdot \frac{\rho}{R}$, имеем

$$N' y = P h + f_1 y \frac{\rho}{R} (P \pm N'),$$

откуда работа, совершаемая кулачком над молотом,

$$N' y = \frac{P \left(h + f_1 y \frac{\rho}{R} \right)}{1 \pm f_1 \frac{\rho}{R}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,9\,]$$

269. Двигатель должен, кроме того, обеспечить работу, равную работе трения в цапфах кулачкового вала и трения кулачка о рукоятку молота.

Пусть P' — давление на цапфы вала, эта сила мало отличается от веса этого вала. Если обозначить через ρ' радиус цапф, работа трения, которое они испытывают в течение второго периода, равна

$$f_1 P' y \frac{\rho'}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,10\,]$$

Согласно теории трения в зубчатых зацеплениях (7), работа трения кулачка за то же время равна

$$N' y \cdot f_1 \frac{y}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,11\,]$$

В итоге работа сопротивления, испытываемая кулачковым валом в течение этого периода, состоит из трех вышеопределенных частей [9], [10] и [11]; она равна

$$\tau_2 = P' \frac{h + f_1 y \frac{\rho}{R}}{1 \pm f_1 \frac{\rho}{R}} \left(1 + \frac{1}{2} f_1 y \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'_E} \right) \right) + f_1 P' y \frac{\rho}{R'} \quad .[\,12\,]$$

270. Кулачковый вал во время холостого хода не подвержен никакой другой силе сопротивления, кроме трения в своих цапфах.

Пусть P'' — давление, которое они испытывают, и которое можно приближенно принять равным весу кулачкового вала, хотя оно должно частично зависеть от действия двигателя.

Если обозначить через y' путь, который проходит кулачок с момента, когда он покинул рукоятку молота, до момента, когда следующий кулачок ударяет по нему, работа трения в течение этого периода будет

$$\tau 3 = f_1 P'' \cdot y' \cdot \frac{\rho'}{R'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,13\,]$$

Заметим, что $y + y'$ образует интервал между двумя последовательными кулачками, равный $\frac{2 \Pi R'}{C}$, где C — число кулачков.

271. Работа, которую должен обеспечить двигатель на кулачковом валу, движение которого должно быть периодически равномерным, очевидно, для каждого удара молота равна сумме величин τ_1, τ_2, τ_3, заданных формулами [8], [12] и [13].

Из этого легко заключить интенсивность движущей работы в секунду.

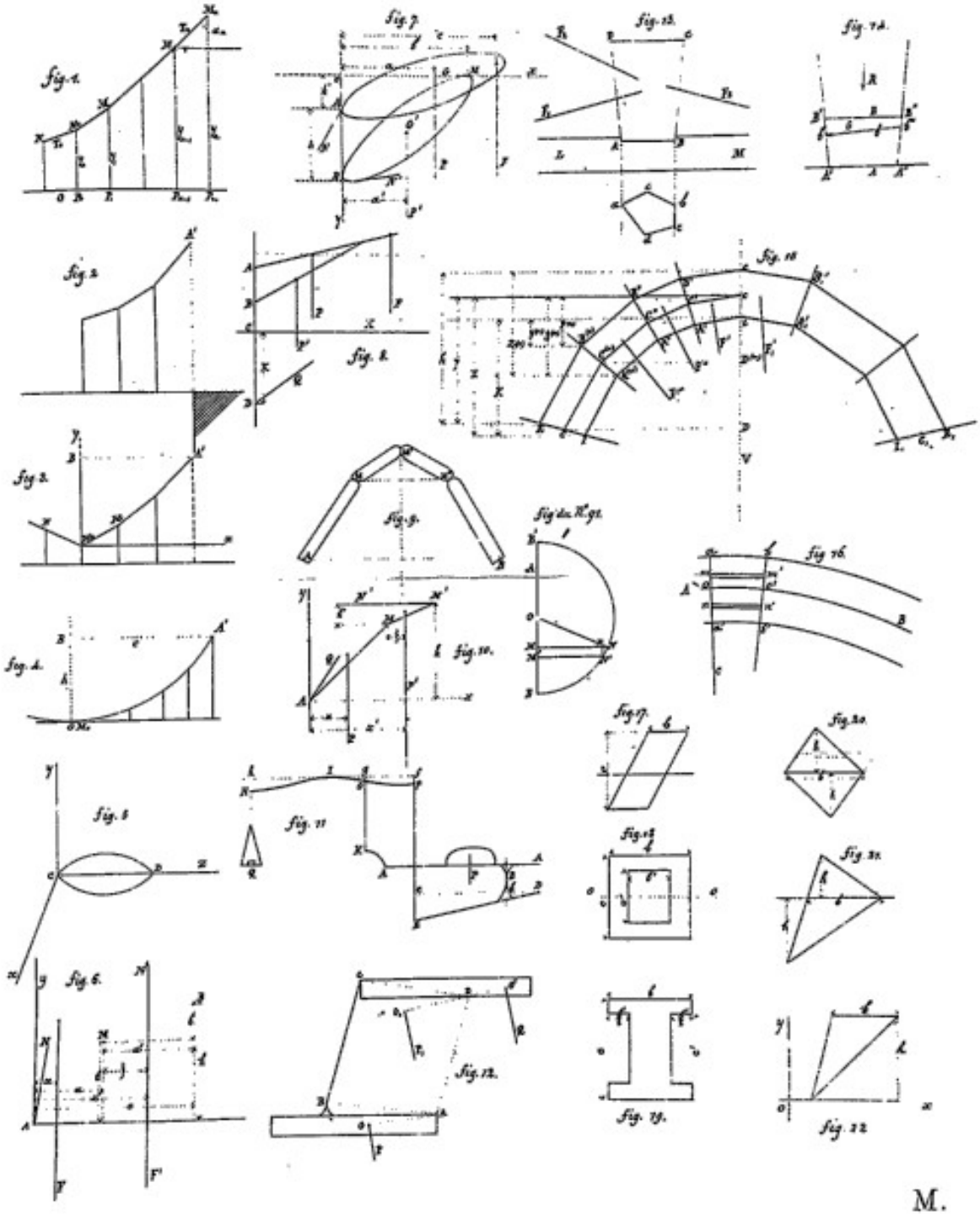


fig. 1.
fig. 2.
fig. 3.
fig. 4.
fig. 5
fig. 6.
fig. 7.
fig. 8.
fig. 9.
fig. 10.
fig. 11
fig. 12.
fig. 13.
fig. 14.
fig. 15.
fig. 16.
fig. 17.
fig. 18
fig. 19.
fig. 20
fig. 21.
fig. 22.

M.

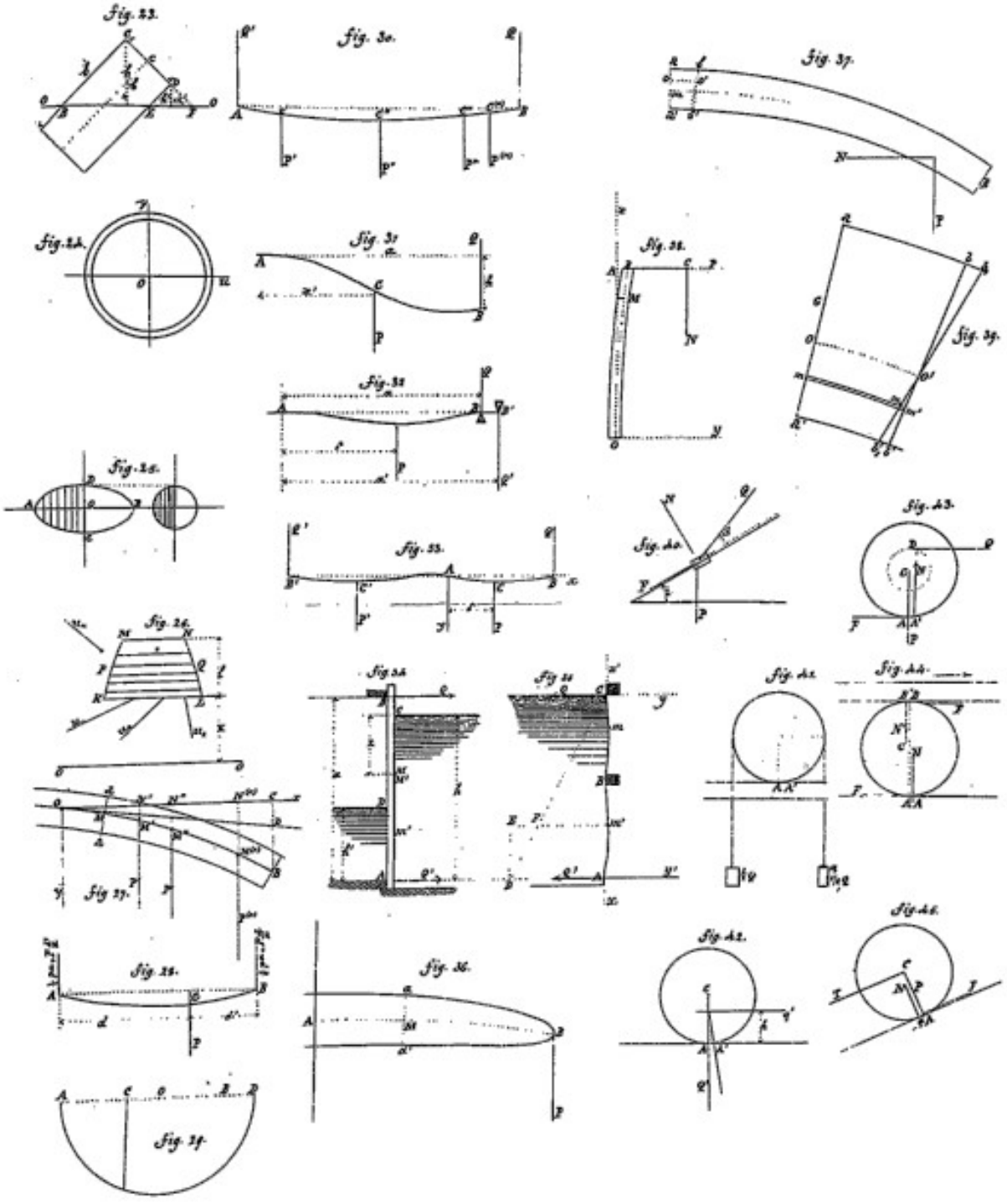
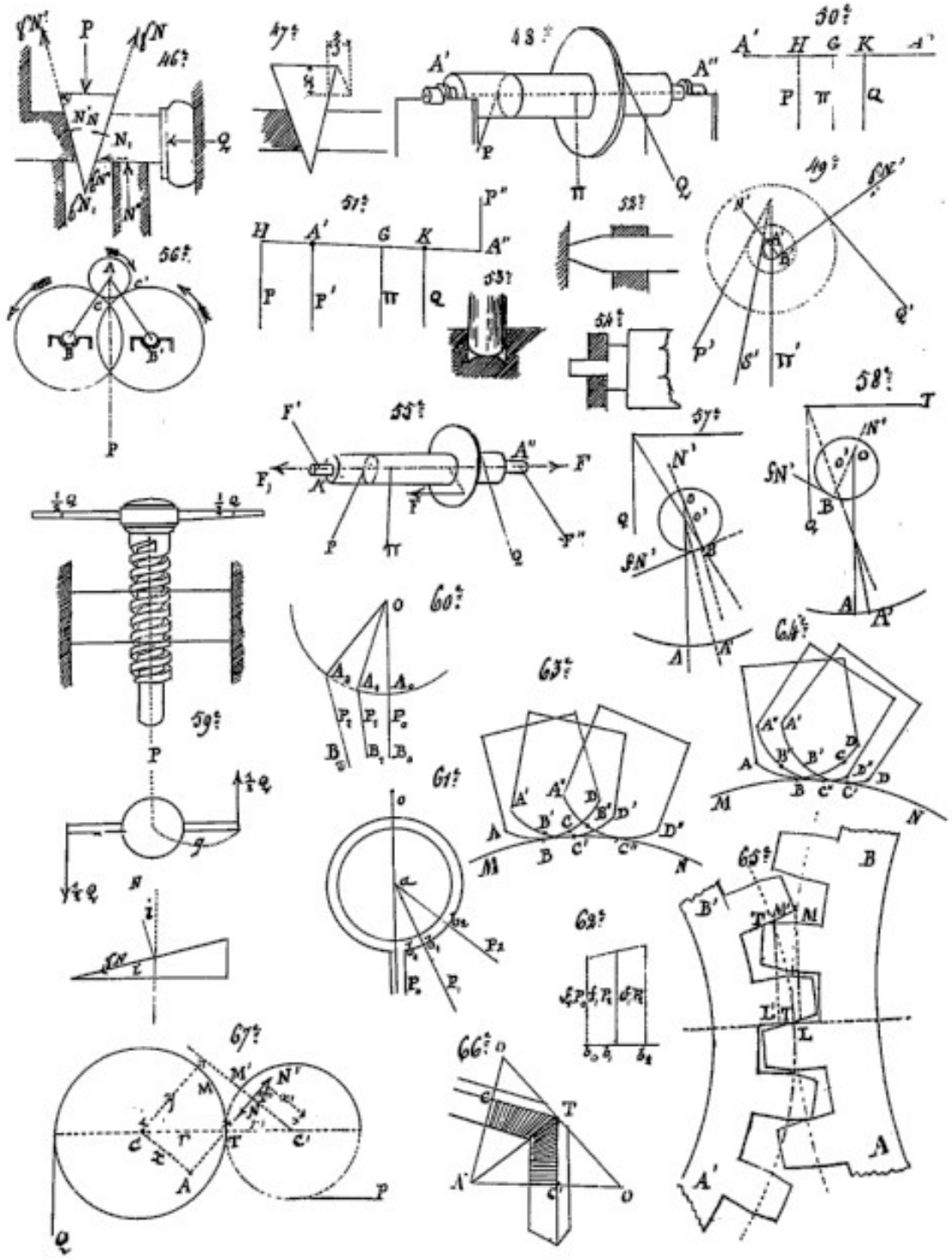
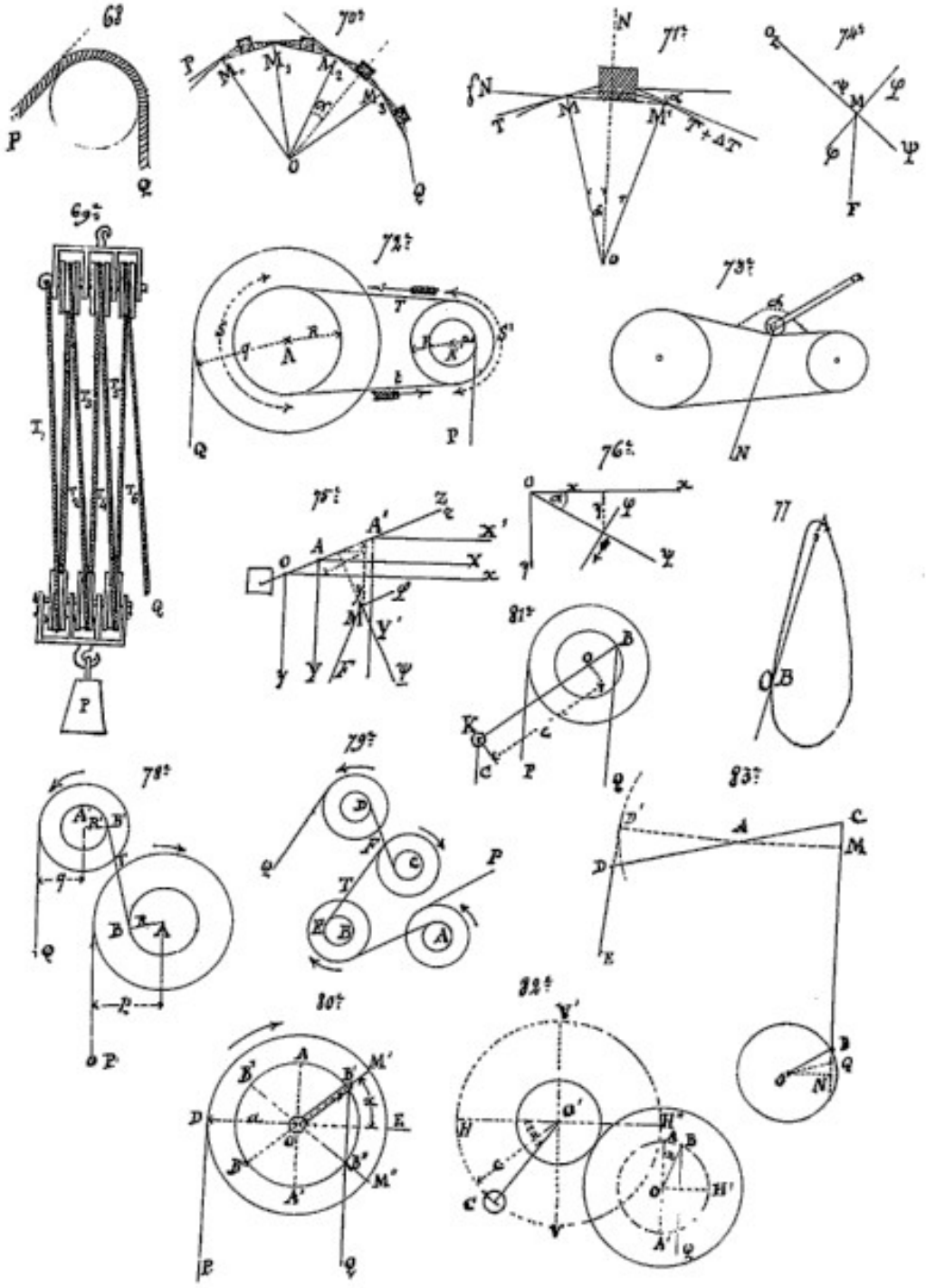


Fig. 23.
Fig. 30.
Fig. 37.
Fig. 24.
Fig. 31.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 32.
Fig. 25.
Fig. 33.
Fig. 40.
Fig. 43.
Fig. 26.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 42.
Fig. 44.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 36.
Fig. 41.
Fig. 29.



M.



Оглавление

Заметки по прикладной механике, относящиеся к принципам устойчивости сооружений и к динамической теории машин.....1
Глава 1-я Краткое изложение основных понятий рациональной механики.....1
§: 1. О различных разделах механики.....1
§: 2. О движении, рассматриваемом независимо от его причин.....2
§: 3 О силах, рассматриваемых независимо от измерения их эффектов.....5
§: 4. Динамика материальной точки.....7
1° Прямолинейное движение.....7
2° Криволинейное движение.....8
§: 5 Общие принципы движения системы материальных точек.....10
§: 6 Статика, или общие условия равновесия тел.....12
Глава 2. Применение статики к шарнирным системам без трения.....15
§:1 Теория, применимая к висячим мостам.....15
§:2 Многоугольные системы твердых тел с простыми шарнирами.....21
§: 3 О системах с полными связями.....26
§: 4 О системах с альтернирующими шарнирами.....28
Глава 3. О сопротивлении материалов, применяемых в строительстве.....35
§:1 Призмы, растягиваемые или сжимаемые параллельно своей длине.....35
§:2 Общие сведения об изгибе призм.....39
§:3 Формулы для моментов инерции различных плоских поверхностей и для соответствующих пределов моментов упругости.....43
§: 4 Призмы, подверженные поперечной равномерно распределенной нагрузке и разрывным силам в одной плоскости.....47
1° Общие сведения по этому вопросу.....47
2° Части горизонтальной призмы, заделанной одним концом, подверженной вертикальной силе на другом конце и, кроме того, равномерно загруженной по всей длине.....49
3° Призма, опертая на две опоры на одном уровне и подверженная вертикальной силе P в точке C, помимо равномерно распределенной нагрузки pa по всей длине a - фигура 28.....51
4° Призма, опертая на две опоры AB на одном уровне и подверженная разрывным вертикальным силам P', P'', P''' 52
5° Призма, закрепленная горизонтально в заданной точке A, опертая одним концом B на опору, подверженная на промежутке равномерно

распределенной нагрузке ра на длине АВ = а и отдельной силе Р, приложенной в точке С. (фиг. 31).....54
6° Призма, закрепленная горизонтально в двух точках АВ на одном уровне, подверженная на промежутке равномерно распределенной нагрузке ра по длине АВ = а и отдельной силе Р, приложенной в точке С.....57
7° Призма, опертая на три опоры В', А, В на одном уровне, подверженная равномерно распределенной нагрузке и двум отдельным силам Р', Р в промежуточных точках С', С. фиг. 33.....61
8° Вертикальные игольчатые затворы, поддерживающие напор воды.....63
§: 5. Экспериментальные данные и приложения.....66
I Таблица сопротивления тел растяжению.....66
II Таблица сопротивления раздавливанию.....66
§: 6. Тела равного сопротивления.....68
§: 7. Призмы, подверженные силам произвольных направлений.....69
§: 8. Изгиб и сопротивление криволинейных деталей.....74
§: 9. Кручение призм.....77
Глава 4. О трении и жесткости канатов.....81
§: 1 О трении скольжения.....81
§: 2. О сопротивлении, называемом трением качения.....84
§: 3. Клиновой пресс.....90
§: 4. О вороте.....92
§: 5. Формулы, относящиеся к тяге повозок.....101
§: 6. О винте с прямоугольной резьбой.....103
§: 7. Трение кривошипных пальцев или эксцентриков о их подшипники или втулки.....106
§: 8. Смешанное трение качения и скольжения; зубчатые зацепления.....107
§: 9. О жесткости канатов.....111
Таблица для расчета жесткости различных канатов вокруг блока диаметром один метр.....111
§: 10. Трение каната или ремня о неподвижный цилиндр.....114
§:11. О передаче движения с помощью бесконечных канатов или ремней.....115
Глава 5. О переменном движении твердых тел, вынужденных вращаться вокруг неподвижных осей.....118
§: 1 Вычисление углового ускорения.....118
§:2. Давление на опоры.....119
§: 3. О центре удара.....122
§: 4. Баллистический маятник.....123

§: 5. Взаимные давления вращающихся тел при переменном движении.....125
§: 6. О маховиках.....127
§: 7. О молотах, приводимых в движение кулачками.....135
Чертёж 1.....141
Чертёж 2.....142
Чертёж 3.....143
Чертёж 4.....144